Sur la dualité et la descente d'Iwasawa

par David Vauclair

dédié à T. Nguyen Quang Do.

2 octobre 2008

Résumé

Guided by the concrete examples of cyclotomic units and the ideal class group in cyclotomic Iwasawa theory, we develop a general tool for studying descent and codescent, with a special interest in relating the two of them.

Given any "normic system" $A = (A_n)$ (that is a collection of Galois modules plus additional data), attached to a fixed p-adic Lie extension with Iwasawa algebra Λ, we mainly show that there is a natural morphism

$$R\varprojlim A_n \to RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A_n, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

which can be given a functorial cone measuring the defect of descent as well as the defect of codescent (for the A_n's). Thanks to a sharpening of the usual Poincaré duality, this results in an enlightening relation between these two.

We show in great detail how known results in the cyclotomic situation fit into this setting, and give a generalization to multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions.

AMS Classification 2000 : 11R34, 13C05, 11R23

Key words : Iwasawa theory, Duality, Control.

Table des matières

1 Introduction

Soit F un corps de nombres, p un nombre premier, et $F_\infty = \cup F_n$ une extension galoisienne dont le groupe de Galois, noté Γ, est un groupe de Lie p-adique de dimension cohomologique finie. Supposons donnée une collection $A = (A_n)$, où A_n est un $\mathbb{Z}_p[Gal(F_n/F)]$-module (en pratique d'origine arithmétique, par exemple groupe de classes, unités, groupe de Selmer...), munie à la fois d'une structure de système inductif et de système projectif, ces deux structures vérifiant une condition naturelle de compatibilité normique. A une telle famille de données (appelée système normique dans le texte, cf 2.1), la théorie d'Iwasawa suggère d'associer deux $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules : $A_\infty := \varinjlim A_n$ et $X_\infty := \varprojlim A_n$. Idéalement, on aimerait pouvoir reconstruire la collection des A_n, au moins asymptotiquement (ie. pour n suffisament grand) à partir de la seule donnée de X_∞ et/ou A_∞. Dans cette optique, il est naturel d'étudier les applications de descente $j_n : A_n \to (A_\infty)^{\Gamma_n}$ et de codescente $k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \to A_n$.

Question 1.1 *Que peut-on dire des noyaux et conoyaux de j_n (resp. k_n) pour n suffisamment grand ? En reste-t-il une trace sur X_∞ (resp. A_∞) ?*

Malheureusement, la seule donnée de A_∞ et X_∞ ne suffit pas à caractériser un système normique, même asymptotiquement. Aussi on peut se demander de quelles structures supplémentaires sont munis les couples (X_∞, A_∞) provenant d'un système normique. Dans cette direction :

Question 1.2 *Quel lien existe-t-il entre X_∞ et A_∞ (ou plutôt son dual) ?*

Malgré l'intérêt pratique évident d'une réponse précise et générale à ces deux questions, seuls peu d'efforts semblent leur avoir été consacrés dans cette généralité. On peut citer [Gre94] pour une étude du noyau et conoyau de k_n (du point de vue des modules de normes universelles) dans le cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, lorsque A vérifie un certain nombre d'hypothèses restrictives, dont celle que les j_n sont des isomorphismes. Dans le même ordre d'idées, citons ausi [KY82]. Concernant la seconde question, le cas où les k_n sont des isomorphismes est étudié de manière systématique dans [Jan89].

En revanche, l'étude de ces deux questions pour un système normique donné est une activité fréquente en théorie d'Iwawasa, si bien qu'on dispose de nombreux exemples qui peuvent servir de guide à une théorie générale. Inspiré par les méthodes de [Jan89] et [Nek06], on propose dans cet article un cadre pour une telle théorie, et on établit quelques résultats pratiques qui permettent l'unification, et la généralisation de nombreux résultats connus.

Pour avoir une première idée de ce qu'on peut espérer, on s'inspire essentiellement de deux études parallèles ([LFMNQD05] pour le groupe de classes et [NQDL06] pour les unités cyclotomiques) dans le cas où $F_\infty = \cup F_n$ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique d'un corps de nombres F ($\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$). On peut reformuler quelques résultats de la manière suivante (cf 6.25 et 6.28 pour des résultats plus exhaustifs) :

Proposition 1.3 *([Iwa73], [LFMNQD05]) Si $A_n = \mathcal{C}l(\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]) \otimes \mathbb{Z}_p$, alors il existe une flèche naturelle*

$$X_\infty \stackrel{\alpha_j}{\to} Ext^1_\Lambda(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

dont le noyau et le conoyau sont pseudo-isomorphes. Si ceux-ci sont finis, alors $Ker\, \alpha_j \simeq \varprojlim Ker\, j_n$ et $Coker \alpha_j \simeq \varprojlim Coker\, j_n \simeq \varinjlim Ker\, k_n$.

Proposition 1.4 *([NQDL06], [KN95], [Bel02], [BNQD05]) Supposons F réel, abélien sur $\mathbb{Q}$ et soit $A_n = C_n$ le $\mathbb{Z}_p$-module des unités cyclotomiques à la Sinnott de F_n (cf. [Sin80]). Alors il existe une flèche naturelle, injective et pseudo-surjective :*

$$X_\infty \stackrel{\alpha_j}{\to} Hom_\Lambda(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

De plus $Coker\, \alpha_j \simeq \varprojlim Coker\, j_n \simeq \varinjlim Ker\, k_n$.

Ainsi reformulés, ces résultats suggèrent que pour A quelconque, on devrait pouvoir construire une flèche

$$\alpha_j : X_\infty \to RHom_\Lambda(X^*_\infty, \mathbb{Z}_p))$$

avec $X^*_\infty := RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$, dont "le" cône soit relié à la fois au défaut de descente et de codescente. La première partie de l'article est consacrée à la construction d'une telle flèche.

Expliquons brièvement les idées de la construction. D'abord, il convient de préciser la notion de défaut de (co)descente : si $A = (A_n)$ est un système normique et $A_\infty = \varinjlim A_n$, il est possible de construire un objet de $R\underline{\Gamma}(A_\infty) \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, qui relève la collection des $R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ usuels. Celui-ci est naturellement muni d'une flèche "de descente" $A \to R\underline{\Gamma}(A_\infty)$, dont on construira un cône fonctoriel : $C(j_A) \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$. C'est cet objet qui encode le défaut de descente. Concrètement la cohomologie de $C(j_A)$ est nulle en degrés < -1, puis vaut ensuite $(Ker\, j_n)$, $(Coker\, j_n)$, $(H^1(\Gamma_n, A_\infty))$, $(H^2(\Gamma_n, A_\infty))$ ... De manière "duale", on définit le défaut de codescente $C(k_A) \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$ (ici il

faut prendre certaines précautions, cf texte). On procède alors approximativement comme suit :
- Si A_n est de la forme $R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ (ie. si $C(j_A) = 0$), on construit un isomorphisme α_j (théorème 3.2).
- Dans le cas cas général, la définition de $C(j_A)$ permet de se ramener au cas précédent pour contruire un triangle distingué fonctoriel

$$\alpha_j(A) = \left(X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} RHom_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) \to \Delta_j(A) \to X_\infty[1]\right)$$

dans lequel $\Delta_j(A)$ est relié explicitement à $C(j_A)$.
- On procède de manière analogue pour construire un triangle distingué fonctoriel

$$\alpha_k(A) = \left(X_\infty^* \xrightarrow{\alpha_k} RHom_\Lambda(X_\infty, \Lambda) \to \Delta_k(A) \to X_\infty^*[1]\right)$$

dans lequel $\Delta_k(A)$ est relié explicitement à $C(k_A)$.
- Sous l'hypothèse de finitude adéquate, on utilise la condition normique de compatibilité entre la structure inductive et projective pour construire un isomorphisme de triangles : $\alpha_j(A) \simeq RHom_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$, fonctoriel en A.

En pratique, ces trois dernières étapes sont menées de front et aboutissent avec l'énoncé et la preuve du théorème principal (4.6). Dans le texte, tout ce qui précède est énoncé dans le cadre plus général où Γ est profini de dimension cohomologie finie, tel que Λ soit noethérien. Lorsque Γ est un groupe de Lie p-adique de dimension cohomologique finie, alors la dualité de Poincaré permet d'exprimer de manière plus éclairante le rapport entre descente et codescente (cf 4.8).

Dans ce qui précède, on a négligé les questions de finitude. On y apporte une certaine attention dans le texte, notamment pour établir des critères de finitude utiles en pratique.

A ce point, s'impose la question du contrôle de $\Delta_j(A)$. Ne sachant comment aborder le cas général, on s'intéresse au cas particulier où $A_n = M_{\Gamma_n}$ pour M un Λ-module de type fini et $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_p}^d$, $d \geq 1$. Dans cette situation, on s'attache notamment à établir un critère maniable pour la pseudo-nullité des modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$, ce qui sera utile dans les applications. Il serait sans doute utile de pousser plus loin l'étude embryonnaire commencée ici.

Dans le cas particulier où $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, apparaît un phénomène nouveau : lorsque A est un système normique raisonnable, les systèmes inductifs (resp. projectif) sous-jacents à la cohomologie de $C(k_A)$ (resp. $C(j_A)$) ont tendance à se stabiliser. Lorsque cela se produit (notamment pour les systèmes normiques usuels provenant de l'arithmétique) il est intéressant de noter que l'on peut reconstruire le système normique (A_n) asymptotiquement à partir de la seule donnée de la flèche $\alpha_j : X_\infty \to RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$. En pratique, le phénomène de stabilisation - lorsqu'il se produit - permet surtout de dresser un tableau général des relations entre descente, codescente et strcture de X_∞ et A_∞. A cet égard, la proposition 5.23 devrait être considérée comme un formulaire.

Pour illustrer nos méthodes, on donne deux applications :

1. à l'étude du groupe des (p)-classes - noté $\mathcal{C}l'$ dans une ${\mathbb{Z}_p}^d$-extension. Outre une preuve unifiée de nombreux résultats connus, on obtient notamment (cf 6.7) :

- l'existence d'un morphisme $\varprojlim \mathcal{C}l'_n \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dont le noyau et le conoyau sont pseudo-isomorphes. Ce résultat fait suite aux tentatives précédentes de [McC01], [LNQD00], [NQDV05] (cf. 6.17), et complète [Nek06] 9.4.1. Sa preuve dépend de l'étude de $\Delta_j(A)$ mentionnée plus haut ainsi que d'un résultat de [Nek06].

- une nouvelle description du sous-module pseudo-nul maximal de $\varprojlim \mathcal{C}l'_n$, sous (Dec_2) (cf texte). L'intérêt de ce résultat tient à sa relation à la conjecture de Greenberg généralisée (cf [Vau05] ou [NQDV05]).

2. à la théorie d'Iwasawa cyclotomique d'un corps de nombres abélien. Dans ce cadre on retrouve 1.3 et 1.4 comme cas particuliers de la situation générale 5.23. Cette approche permet notamment de répondre à une question de [NQDL06]. Cette partie est rédigée de manière à ce que la lecture des énoncés soit indépendante du reste du texte.

L'un des objectifs recherchés dans ces deux applications est une meilleure compréhension de la nature (arithmétique ou algébrique) des résultats connus, ainsi que les hypothèses minimales nécessaires à leur validité. Pour cette raison, mais aussi pour faire apparaître plus clairement la ligne conductrice de notre étude, on s'abstiendra d'invoquer les résultats préexistants dont la preuve relève des méthodes de ce travail.

En appendice, on donne une construction directe du complexe dualisant, laquelle permet notamment son utilisation dans le contexte des systèmes normiques.

Cet article puise visiblement sa motivation et son inspiration dans les méthodes développées par T. Nguyen Quand Do. Ce travail lui est dédié. Le paragraphe 6.2, reprend et améliore les résultats d'une version antérieure, grâce aux suggestions de J. Nekovář. En particulier, le théorème 6.7 et ses corollaires lui sont partiellement dûs, et je le remercie de m'avoir permis de reproduire ici ses arguments. Je remercie aussi B. Angles, J-R. Belliard et R. Sharifi pour leurs encouragements à rédiger ce travail, ainsi que F. Nuccio pour quelques discussions intéressantes. Enfin, je remercie le rapporteur anonyme pour les nombreuses corrections qu'il m'a suggérées.

2 Préliminaires

La présente étude requiert un cadre dans lequel on puisse à la fois utiliser le formalisme des catégories dérivées, et effectuer facilement les passages à la limite habituels de la théorie d'Iwasawa. A cet effet, on introduit la catégorie des "systèmes normiques" le long de la tour d'Iwasawa. On fixe d'abord quelques notations, puis on explique rapidement comment fonctionnent l'algèbre homologique et les passages à la limite dans cette catégorie.

2.1 Λ-modules, systèmes normiques

Fixons un groupe profini Γ, et indexons la famille des sous-groupes ouverts distingués de Γ par un ensemble N. Pour $n \in N$, on note Γ_n le sous-groupe de Γ correspondant, et $G_n := \Gamma/\Gamma_n$. L'anti-inclusion des sous-groupes confère à N une structure d'ensemble ordonné filtrant ($n \leq m \Leftrightarrow \Gamma_n \supset \Gamma_m$), suivant laquelle $\Gamma = \varprojlim G_n$.

On fixe une fois pour toutes un nombre premier p, et $\Lambda := \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$ désigne l'algèbre d'Iwasawa de Γ. Notons ${}_\Lambda\mathcal{C}$ (resp. ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$) la catégorie des Λ-modules à gauche (resp. $\mathbb{Z}_p$-modules). On considère aussi ${}_\Gamma\mathcal{C}$ (resp. ${}_{G_n}\mathcal{C}$) la sous-catégorie pleine de ${}_\Lambda\mathcal{C}$, formée par les modules sur lesquels Γ agit discrètement (resp. Γ_n agit trivialement), ie. $M \in {}_\Gamma\mathcal{C} \Leftrightarrow M = \cup M^{\Gamma_n}$. On adopte des notations analogues pour les catégories de modules à droite correspondantes. Si $*_1$ et $*_2$ sont deux listes de symboles choisis parmi Λ, $\mathbb{Z}_p$, Γ, G_n, on note ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ la catégorie de multi-modules correspondante (les différentes structures doivent être compatibles entre elles). Ainsi, ${}_\Gamma\mathcal{C}_\Lambda$ désigne par exemple la catégorie des Λ-bimodules sur lesquels l'action de Γ à gauche est discrète.

Définition 2.1
Soit ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ une catégorie de multi-modules comme ci-dessus. La catégorie des "systèmes normiques", notée ${}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ est définie comme suit :

- un objet A de ${}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ consiste en la donnée, pour tout couple $n \leq m$, de flèches de ${}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$: $j_{n,m} : A_n \to A_m$ et $k_{m,n} : A_m \to A_n$ vérifiant :
$(Norm1)$: $A_n \in {}_{G_n,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$.
$(Norm2)$: Si $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, $j_{n_2,n_3} \circ j_{n_1,n_2} = j_{n_1,n_3}$ et $k_{n_2,n_1} \circ k_{n_3,n_2} = k_{n_3,n_1}$.
$(Norm3)$: Pour $n \leq m$, $j_{n,m} \circ k_{m,n} : A_m \to A_m$ est la multiplication à gauche par l'élément $\sum_{g \in \Gamma_n/\Gamma_m} g \in \mathbb{Z}_p[G_m]$.
$(Norm4)$: Pour $n \leq m$, $k_{m,n} \circ j_{n,m} : A_n \to A_n$ est la multiplication par $(\Gamma_n : \Gamma_m)$.

- une flèche $A \to B$ est la donnée pour chaque n d'une flèche de ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}$: $A_n \to B_n$, qui commute avec les $j_{n,m}$ et les $k_{m,n}$.
On définit une catégorie ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\underline{\Gamma}}$ de façon analogue.

L'exemple fondamental, noté $\underline{\Lambda}$, est défini comme suit : $j_{n,m} : \mathbb{Z}_p[G_n] \to \mathbb{Z}_p[G_m]$, $x \mapsto \sum_{g \in \Gamma_n/\Gamma_m} gx = x \sum_{g \in \Gamma_n/\Gamma_m} g$ (Γ_n/Γ_m est distingué dans G_m) et $k_{m,n} : \mathbb{Z}_p[G_m] \to \mathbb{Z}_p[G_n]$ la projection naturelle. $\underline{\Lambda}$ est au choix un objet de ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{\Lambda}$, ${}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$ (ou encore, par oubli de structure, de ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$).

Lorsque les flèches de transition d'un objet $A \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ sont évidentes, on désignera simplement l'objet $A \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ par la collection (A_n) (eg. $\underline{\Lambda} = (\mathbb{Z}_p[G_n])$). On remarque que ${}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ est une catégorie abélienne, munie pour chaque n d'un foncteur de projection exact : $\pi_n : {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to_{G_n,*_1} \mathcal{C}_{*_2}$, $A \mapsto A_n$.

Définition 2.2 *(i) Si $(A, B) \in {}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \times {}_{\Lambda,*_3}\mathcal{C}_{*_4}$ ou ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\Lambda} \times_{*_3} \mathcal{C}_{*_4,\Lambda}$, on note $\underline{Hom}(A, B)$ le système normique formé de la collection des G_n-modules $Hom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B)$ (action par conjugaison), munie des applications de transition évidentes. C'est un objet de ${}_{\underline{\Gamma},*_2,*_3}\mathcal{C}_{*_1,*_4}$ ou ${}_{*_2,*_3}\mathcal{C}_{*_1,*_4,\underline{\Gamma}}$, suivant qu'on considère l'action de G_n par conjugaison à gauche ou à droite.*

(i) Si $(A, B) \in {}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\Lambda} \times {}_{\Lambda,*_3}\mathcal{C}_{*_4}$, on note $A \underline{\otimes} B$ le système normique formé de la collection des G_n-modules $A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B$ (action par conjugaison), munie de ses applications de transition naturelles. C'est un objet de ${}_{\underline{\Gamma},*_1,*_3}\mathcal{C}_{*_2,*_4}$ ou ${}_{*_1,*_3}\mathcal{C}_{*_2,*_4,\underline{\Gamma}}$, suivant qu'on considère l'action de G_n par conjugaison à gauche ou à droite.

Si $A \in {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$, on note simplement $\varinjlim A \in {}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ (resp. $\varprojlim A \in {}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$) la limite inductive (resp. projective) prise suivant les $j_{n,m}$ (resp. $k_{n,m}$). De même pour les modules à droite.

L'axiome $(Norm1)$ donne lieu pour chaque $n \in N$ à une flèche de descente $A_n \to (\varinjlim A)^{\Gamma_n}$, ainsi qu'à une flèche de codescente $(\varprojlim A)_{\Gamma_n} \to A_n$. L'axiome $(Norm3)$ assure que ces deux collections de flèches commutent aux applications de transition $j_{n,m}$ et $k_{m,n}$. On a donc, dans ${}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ une flèche de descente $A \to \underline{Hom}(\mathbb{Z}_p, \varinjlim A)$, ainsi qu'une flèche de codescente $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} \varprojlim A \to A$. Pour des raisons d'algèbre homologique évidentes, on préfèrera noter $\underline{\Gamma}(\varinjlim A)$ au lieu de $\underline{Hom}(\mathbb{Z}_p, \varinjlim A)$ (voir prochain paragraphe). On notera que le noyau et le conoyau de l'application de descente $A \to \underline{\Gamma}(\varinjlim A)$ sont de $\mathbb{Z}_p$-torsion (au sens où chaque composante est de $\mathbb{Z}_p$-torsion), grâce à l'axiome $(Norm4)$. C'est la seule utilité de cette axiome, dont la totalité du présent texte est en fait indépendante.

D'après la discussion précédente, le foncteur $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} - : {}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ (resp. $\underline{\Gamma} : {}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2}$) est adjoint à gauche au foncteur $\varprojlim : {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ (resp. adjoint à droite au foncteur $\varinjlim : {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2}$). En particulier, $\underline{\Gamma}(-)$ conserve les injectifs (car $\varinjlim$ est exact à gauche). Pour $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} -$ et les projectifs, voir 2.11.

Un foncteur additif $F : {}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\Gamma,*_3}\mathcal{C}_{*_4}$ est dit Γ-linéaire s'il vérifie $F({}_g m) = {}_g m$ pour tout $g \in \Gamma$, ${}_g m$ désignant la multiplication à gauche par g. Un tel foncteur possède alors une extension évidente, $F : {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{\underline{\Gamma},*_3}\mathcal{C}_{*_4}$ définie par $F(j_{n,m}) = j_{n,m}$ et $F(k_{m,n}) = k_{m,n}$. De même, un foncteur additif contravariant Γ-linéaire $F : {}_{\Gamma,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{*_3}\mathcal{C}_{*_4,\Gamma}$ possède une extension $F : {}_{\underline{\Gamma},*_1}\mathcal{C}_{*_2} \to {}_{*_3}\mathcal{C}_{*_4,\underline{\Gamma}}$, définie par $F(j_{n,m}) = k_{m,n}$ et $F(k_{m,n}) = j_{n,m}$. Il y a bien sûr une discussion similaire pour les foncteurs covariants ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\Gamma} \to {}_{*_3}\mathcal{C}_{*_4,\Gamma}$ et les foncteurs contravariants ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\Gamma} \to {}_{\Gamma,*_3}\mathcal{C}_{*_4}$.

De cette manière, on obtient par exemple un foncteur $Hom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p) : {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{\Lambda} \to {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$. On relève l'isomorphisme important (cas particulier de 2.3) :

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Lambda}, \mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\Lambda}$$

où le premier $\underline{\Lambda}$ est un objet de ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{\Lambda}$ et le second un objet de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$.

Induction normique.

On définit quatre foncteurs (induction et co-induction) :

$$\underline{Ind}, \underline{Coind} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \to {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}} \qquad \underline{Ind}, \underline{Coind} : \mathcal{C}_{\Lambda} \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{\Lambda}$$

de la manière suivante (cf def. 2.2)

- $\underline{Ind}A := \Lambda\underline{\otimes}A$ (resp. $A\underline{\otimes}\Lambda$), muni de la conjugaison à droite (resp. gauche) si $A \in {}_\Lambda\mathcal{C}$ (resp. $A \in \mathcal{C}_\Lambda$). C'est un Λ-module à gauche (resp. à droite) via le facteur Λ.
- $\underline{Coind}A := \underline{Hom}(\Lambda, A)$, muni de la conjugaison à droite (resp. gauche) si $A \in {}_\Lambda\mathcal{C}$ (resp. $A \in \mathcal{C}_\Lambda$). C'est un Λ-module à gauche (resp. droite) via la structure à droite (resp. gauche) de Λ.

Ont alors lieu les isomorphismes bifonctoriels suivants :
- Si $(A, B) \in {}_\Lambda\mathcal{C} \times {}_\Lambda\mathcal{C}$, dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$) :

$$\underline{Hom}(A, B) \simeq Hom_\Lambda(\underline{Ind}A, B) \qquad \text{(resp. } \underline{Hom}(A, B) \simeq Hom_\Lambda(A, \underline{Coind}B))$$

- Si $(A, B) \in \mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_\Lambda$, le même isomorphisme a lieu, mais cette fois dans $\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$ (resp. ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$).
- Si $(A, B) \in \mathcal{C}_\Lambda \times {}_\Lambda\mathcal{C}$, on a dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$) :

$$\underline{Ind}(A) \otimes_\Lambda B \simeq A\underline{\otimes}B \qquad \text{(resp. } A \otimes_\Lambda \underline{Ind}B \simeq A\underline{\otimes}B)$$

Regarder $\mathbb{Z}_p$ comme un Λ-module à gauche provoque dans ${}_\Lambda\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$ les isomorphismes suivants

$$\underline{Ind}(\mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\Lambda} \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Lambda}, \mathbb{Z}_p) \simeq \underline{Coind}(\mathbb{Z}_p)$$

Plus généralement :

Proposition 2.3 *Les foncteurs $\underline{Ind}, \underline{Coind} : {}_\Lambda\mathcal{C} \to {}_\Lambda\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$ sont naturellement isomorphes. De même pour les foncteurs $\mathcal{C}_\Lambda \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$.*

Preuve : On laisse au lecteur le soin de vérifier que la collection d'applications naturelles $\phi_n : Hom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\Lambda, A) \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B,\ f \mapsto \sum_{g\in\Gamma_n\backslash\Gamma} g^{-1} \otimes f(g)$ respecte la structure de système normique à droite, ainsi que la structure de Λ-module à gauche, et que c'est un isomorphisme.

$\square$

Induction discrète. (inutile, sauf pour 7.3)

On voit facilement que $\underline{Ind} : {}_\Lambda\mathcal{C} \to {}_\Lambda\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$ transforme objets de ${}_\Gamma\mathcal{C}$ en objets de ${}_\Gamma\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$. De même pour les trois variantes. A partir de là, on peut définir des foncteurs d'induction discrète à partir des précédents, par limite inductive :

$$Ind_\Gamma, Coind_\Gamma : {}_\Gamma\mathcal{C} \to {}_\Gamma\mathcal{C}_\Gamma \qquad Ind_\Gamma, Coind_\Gamma : \mathcal{C}_\Gamma \to {}_\Gamma\mathcal{C}_\Gamma$$

$Ind_\Gamma(A) := \varinjlim \underline{Ind}(A)$ et $Coind_\Gamma(A) := \varinjlim \underline{Coind}(A)$.

Un processus de double limite permet d'écrire des isomorphismes bifonctoriels à partir des précédents (se ramener au cas où A est finiment engendré). Par exemple :

- Si $(A,B) \in {}_\Gamma\mathcal{C} \times {}_\Gamma\mathcal{C}$, on a dans ${}_\Lambda\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_\Lambda$) :

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,B) \simeq Hom_\Lambda(Ind_\Gamma(A), B) \quad (\text{resp. } Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,B) \simeq Hom_\Lambda(A, Coind_\Gamma(A)))$$

La structure de Λ-module de $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,B)$ étant ici induite par l'action de Γ par conjugaison. On prendra garde au fait que celle-ci n'est pas discrète en général. Cette structure de Λ-module peu naturelle (et contraire aux conventions générales de cet article, expliquées plus haut), ne sera utilisée en pratique que dans la situation où l'action de Γ sur B est triviale (voir notamment 7.2).

2.2 (Bi-)foncteurs dérivés

Soit F un bifoncteur additif exact à gauche. Si l'une des deux catégories de départ possède suffisamment d'objets F-acycliques (ou déployants), on peut définir le foncteur dérivé droit RF. Nous appliquons ce principe pour dériver certains des foncteurs définis au paragraphe précédent. On indique ensuite comment s'écrivent quelques unes des compatibilités habituelles entre Hom et $\otimes$ dans ce cadre. Pour une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, $Kom^a(\mathcal{C})$, $a \geq 1$ (resp. $Kom^a_{naifs}(\mathcal{C})$, $Kom^*(\mathcal{C})$, $K^*(\mathcal{C})$, $D^*(\mathcal{C})$, $* = +, -, b$) désigne la catégorie des complexes a-uples (resp. celle des complexes a-uples naifs, celle des complexes simples, des complexes simples à homotopie près, la catégorie dérivée). Un objet de $Kom(\mathcal{C}) = Kom^1(\mathcal{C})$ sera le plus souvent symbolisé par A, et par $A^\bullet$ seulement lorsque la clarté l'exige.

Comme notre étude est restreinte au cas où Γ est de dimension cohomologique finie et qu'en pratique ou travaillera toujours dans D^b, on ne cherche pas à étendre au maximum le domaine de définition des foncteurs dérivés.

Proposition 2.4 *1. Soient $*_1, *_2, *_3, *_4$ quatre listes de symboles choisis parmi $\mathbb{Z}_p$ et Λ. Si $*_1 = *_2 = \emptyset$ ou $*_3 = *_4 = \emptyset$, alors :*

(i) Le bifoncteur $\underline{Hom}$: ${}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \times {}_{\Lambda,*_3}\mathcal{C}_{*_4} \to {}_{\underline{\Gamma},*_2,*_3}\mathcal{C}_{*_1,*_4}$ est dérivable à droite, ainsi que ses trois variantes obtenues en changeant Λ et/ou $\underline{\Gamma}$ de côté. On note $R\underline{Hom} : D^- \times D^+ \to D^+$ le foncteur ainsi obtenu.

(ii) Le bifoncteur $\underline{\otimes}$: ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,\Lambda} \times {}_{\Lambda,*_3}\mathcal{C}_{*_4} \to {}_{\underline{\Gamma},*_1,*_2}\mathcal{C}_{*_3,*_4}$ (ou ${}_{*_1,*_2}\mathcal{C}_{*_3,*_4,\underline{\Gamma}}$) est dérivable à gauche. On note $\overset{L}{\underline{\otimes}} : D^- \times D^- \to D^-$.

2. Soit $* = \Lambda$ *ou* $\mathbb{Z}_p$, *et* $*_1, *_2, *_3, *_4$ *quatre listes de symboles choisis parmi* $\mathbb{Z}_p, \Lambda, \underline{\Gamma}$ *de façon à ce que* $\underline{\Gamma}$ *apparaisse au plus dans une seule liste. Si* $*_1 = *_2 = \emptyset$ *ou* $*_3 = *_4 = \emptyset$, *alors :*

(*i*) *Le bifoncteur* $Hom_* : {}_{*,*_1}\mathcal{C}_{*_2} \times {}_{*,*_3}\mathcal{C}_{*_4} \to {}_{*_2,*_3}\mathcal{C}_{*_1,*_4}$ *est dérivable à droite. On note* $RHom_* : D^- \times D^+ \to D^+$. *Idem si l'on change* $*$ *de coté.*

(*ii*) *Le bifoncteur* $\otimes_* : {}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2,*} \times {}_{*,*_3}\mathcal{C}_{*_4} \to {}_{*_1,*_3}\mathcal{C}_{*_2,*_4}$ *est dérivable à gauche. On note* $\overset{L}{\otimes}_* : D^- \times D^- \to D^-$.

Preuve : 1. (*i*) Supposons $*_3 = *_4 = \emptyset$. La catégorie ${}_{\Lambda,*_3}\mathcal{C}_{*_4} = {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ possède alors suffisamment d'injectifs. Comme la catégorie des injectifs de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ vérifie les deux conditions de [KS05] 13.4.5, cela permet de conclure. Bien sûr, la flèche naturelle de $D^+({}_{\underline{\Gamma},*_2}\mathcal{C}_{*_1})$: $\underline{Hom}(A, I) \to R\underline{Hom}(A, I)$ est un isomorphisme dès que I est injectif. Un objet $I \in Kom({}_{\Lambda}\mathcal{C})$ possédant cette propriété pour tout $A \in Kom({}_{\Lambda,*_1}\mathcal{C}_{*_2})$ sera dit déployant (et les couples (A, I) déployés) pour le foncteur $R\underline{Hom}$. On emploie une terminologie analogue pour tous les bifoncteurs dérivés.

Les autres points se traitent de façon analogue.

□

Remarque 2.5 *Les foncteurs de projection* $\pi_n : {}_{\underline{\Gamma},*_2,*_3}\mathcal{C}_{*_1,*_4} \to_{G_n,*_2,*_3} \mathcal{C}_{*_1,*_4}$ *étant exacts, ils passent aux catégories dérivées. En composant* π_n *avec* $R\underline{Hom}$ *défini ci-dessus, on retrouve les bifoncteurs usuels* $RHom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}$. *De même* $\pi_n \circ \underline{\overset{L}{\otimes}} = \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}$. *Il est utile de noter que la famille* (π_n) *est conservative.*

Les compatibilités habituelles entre Hom et $\otimes$ s'étendent naturellement à ce cadre (adjonction, évaluation). Détaillons quelques cas utiles.

Proposition 2.6 *Soit* $* = \Lambda$ *ou* $\mathbb{Z}_p$.
1. Pour $(A, B, C) \in D^-(\mathcal{C}_\Lambda) \times D^-({}_\Lambda\mathcal{C}_*) \times D^+(\mathcal{C}_*)$, *il y a dans* $D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *et* $D^+(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$ *un isomorphisme d'adjonction tri-fonctoriel :*

$$adj : RHom_*(A \underline{\overset{L}{\otimes}} B, C) \simeq R\underline{Hom}(A, RHom_*(B, C))$$

2. (*i*) *Pour* $(A, B, C) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda) \times D^b({}_*\mathcal{C}_\Lambda) \times D^b({}_*\mathcal{C})$, *il y a dans* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *et* $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$ *un morphisme d'évaluation trifonctoriel :*

$$ev : A \underline{\overset{L}{\otimes}} RHom_*(B, C) \to RHom_*(R\underline{Hom}(A, B), C)$$

(ii) Pour $(A, B, C) \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C}) \times D^b({}_\Lambda\mathcal{C}_*) \times D^b(\mathcal{C}_*)$*, il y a dans* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *et* $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$ *un morphisme d'évaluation trifonctoriel :*

$$ev : RHom_*(B, C)\underline{\overset{L}{\otimes}}A \to RHom_*(R\underline{Hom}(A, B), C)$$

(iii) Les morphismes (i) et (ii) ci-dessus sont des isomorphismes lorsque A *est isomorphe (dans* D^b*) à un complexe parfait.*

Preuve : 1. (i) Pour chaque $n \in N$, il y a un isomorphisme naturel entre les trifoncteurs $\mathcal{C}_\Lambda \times {}_\Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \to_{G_n} \mathcal{C}$ $(A, B, C) \mapsto Hom_*(A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B, C)$ et $(A, B, C) \mapsto Hom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, Hom_*(B, C))$. Il est facile de voir que cet isomorphisme est compatible à la structure de système normique, au sens où il identifie $Hom_*(k_{m,n}, C)$ avec $j_{n,m}$ et $Hom_*(j_{n,m}, C)$ avec $k_{m,n}$. On obtient ainsi un isomorphisme entre les trifoncteurs $\mathcal{C}_\Lambda \times {}_\Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$, $(A, B, C) \mapsto Hom_*(A\underline{\otimes}B, C)$ et $(A, B, C) \mapsto \underline{Hom}(A, Hom_*(B, C))$, d'où immédiatement un isomorphisme de trifoncteurs $K^-(\mathcal{C}_\Lambda) \times K^-({}_\Lambda\mathcal{C}_*) \times K^+(\mathcal{C}_*) \to K^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ par extension des trifoncteurs aux complexes. Mais alors, l'extension au complexes du trifoncteur $(A, B, C) \mapsto Hom_*(A\underline{\otimes}B, C)$ est isomorphe (avec les conventions de signes adéquates, cf [Del], 1.1.8) :

- d'une part au trifoncteur obtenu en composant l'extension aux complexes du bifoncteur $(D, C) \mapsto Hom_*(D, C)$ avec l'extension aux complexes du bifoncteur $(A, B) \mapsto A\underline{\otimes}B$,

- d'autre part au trifoncteur obtenu en composant l'extension aux complexes du bifoncteur $(A, D) \mapsto \underline{Hom}(A, D)$ avec l'extension aux complexes du bifoncteur $(B, C) \mapsto Hom_*(B, C)$.

Aussi les deux derniers trifoncteurs sont-ils isomorphes. Il suffit de choisir A à objets projectifs et C à objets injectifs pour obtenir l'isomorphisme de l'énoncé.

2. (i) Se traite de façon analogue, à partir du morphisme fonctoriel d'évaluation entre les trifoncteurs ${}_\Lambda\mathcal{C} \times {}_\Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$. Idem pour (ii).

(iii) est une conséquence directe du fait suivant : si $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ (resp. ${}_\Lambda\mathcal{C}$) est projectif de type fini, alors la flèche d'évaluation

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} Hom_*(B, C) \to Hom_*(Hom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B), C)$$

$$(\text{resp. } Hom_*(B, C) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A \to Hom_*(Hom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B), C)\ )$$

est un isomorphisme pour tout $(B, C) \in {}_*\mathcal{C}_\Lambda \times {}_*\mathcal{C}$ (resp. ${}_\Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_*$).

□

Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$. Si $F : D^+(\mathcal{C}) \to D^+(\mathcal{C}'')$ est un foncteur, on notera encore $F : D^+(\mathcal{C}') \to D^+(\mathcal{C}'')$ le foncteur obtenu en composant F avec le foncteur évident $D^+(\mathcal{C}') \to D^+(\mathcal{C})$, et on parlera de la "restriction de F à $D^+(\mathcal{C}')$". Il s'agit d'un abus de langage puisqu'en général le foncteur évident n'est pas fidèle.

Proposition 2.7 *Notons $\underline{\Gamma} : {}_{\Gamma}\mathcal{C} \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\Gamma} \to \mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$) la restriction à ${}_{\Gamma}\mathcal{C} \subset {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\Gamma} \subset \mathcal{C}_{\Lambda}$) du foncteur $\underline{Hom}(\mathbb{Z}_p, -)$. Alors :*

(i) Le foncteur $\underline{\Gamma}$ est dérivable à droite, et donne donc $R\underline{\Gamma} : D^+({}_{\Gamma}\mathcal{C}) \to D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$. On a de même $R\underline{\Gamma} : D^+(\mathcal{C}_{\Gamma}) \to D^+(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$.

(ii) Il y a une flèche naturelle de $R\underline{\Gamma}$ vers la restriction à $D^+({}_{\Gamma}\mathcal{C})$ du foncteur $R\underline{Hom}(\mathbb{Z}_p, -) : D^+({}_{\Lambda}\mathcal{C}) \to D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$. Idem en remplaçant ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_{\Gamma}$.

(iii) Si Λ est noethérien et si les objets de cohomologie de $A \in D^+({}_{\Gamma}\mathcal{C})$ (resp. $D^+(\mathcal{C}_{\Gamma})$) sont tous des $\mathbb{Z}_p$-modules de torsion, alors la flèche précédente induit un isomorphisme $R\underline{\Gamma}(A) = R\underline{Hom}(\mathbb{Z}_p, A)$.

Preuve : (i) ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{\Gamma}$ possèdent suffisamment d'injectifs.

(ii) résulte de la propriété universelle du foncteur dérivé droit $R\underline{\Gamma}$.

(iii) Par troncature, on se ramène tout de suite au cas où A est concentré en degré 0. Dans ce cas, A possède une résolution $A \to I$ dans laquelle les objets de I sont de $\mathbb{Z}_p$-torsion, injectifs dans ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$. Le résultat suit, d'après le lemme 7.1 (appendice).

□

Définition 2.8 *Soit $* = \Lambda$ ou $\mathbb{Z}_p$, et $*_1, *_2$ deux listes de symboles choisis parmi $\mathbb{Z}_p, \Lambda, \underline{\Gamma}$, dont l'une au moins contient $*$.*

On définit $Bid_* : D^b({}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}) \to D^b({}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2})$ par

$$Bid_*(A) := RHom_*(RHom_*(A, *), *)$$

et l'on note $bid_* : A \to Bid_*(A)$ le morphisme naturel de bidualité.

Si $*$ est noethérien de dimension homologique finie, bid_* est un isomorphisme dès A est d'amplitude bornée, à objets de cohomologie de type fini sur $*$ (dualité de Grothendieck). Pour $* = \mathbb{Z}_p$, on décrira un peu plus loin l'effet de $Bid_{\mathbb{Z}_p}$ sur une classe plus large d'objets ; le cas significatif est celui où A un module divisible de cotype fini : $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$ est alors le module de Tate de A placé en degré -1 (cf 2.12).

2.3 Limites

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}'$) deux catégories abéliennes dans lesquelles les produits infinis existent et sont exacts (resp. une cat. ab. avec sommes infinies exactes). On pourra par exemple prendre $\mathcal{C}_1 = {}_*\mathcal{C}$ avec $* = \mathbb{Z}_p, \Lambda$ ou $\underline{\Gamma}$ (resp. $\mathcal{C}' = {}_*\mathcal{C}$ avec $* = \mathbb{Z}_p, \Lambda, \Gamma$ ou $\underline{\Gamma}$). Soit I un ensemble ordonné filtrant et considérons $\mathcal{C}_1^{I^\circ}$ la catégorie des systèmes projectifs de $\mathcal{C}_1$ indexés sur I, et $\mathcal{C}'^I$ celle des systèmes inductifs de $\mathcal{C}'$ indexés sur I. On dispose alors de foncteurs $\varinjlim : \mathcal{C}'^I \to \mathcal{C}'$ et $\varprojlim : \mathcal{C}_1^{I^\circ} \to \mathcal{C}_1$. Le premier est exact et passe donc aux catégories dérivées ; le second est seulement exact à gauche, et son usage nécessite les résultats suivants :

Proposition 2.9 *Soient I, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}'$ comme ci-dessus. Alors :*
1. $\varprojlim_I$ possède un dérivé droit $R\varprojlim_I : D^+(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \to D^+(\mathcal{C}_1)$.
2. Supposons $\mathcal{C}_1$ munie d'un foncteur Φ vers la catégorie Ab des groupes abéliens. Si Φ est exact et commute aux limites projectives filtrantes, alors $R\varprojlim_I$ commute aussi à Φ. Si de plus Φ est fidèle, alors

(i) $R\varprojlim_I$ est de dimension cohomologique ≤ 1 dès que I possède un ensemble cofinal dénombrable.

(ii) $R^q\varprojlim_I A$ s'annule pour $q \geq 1$, dès que $\Phi(A) \in Ab^{I^\circ}$ est dans l'image essentielle du foncteur d'oubli $Comp^{I^\circ} \to Ab^{I^\circ}$, $Comp$ désignant la catégorie des groupes topologiques compacts.

3. Soit $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_2$ un bifoncteur covariant exact à gauche dérivable à droite (resp. covariant exact à droite et dérivable à gauche de dimension homologique finie) et notons $* = +$ (resp. $* = b$). On suppose que :

- $\mathcal{C}'$ possède suffisamment d'objets déployants (cf preuve de 2.4) pour RF (resp. LF).

- via la première variable, F commute aux produits infinis.

Alors RF s'étend naturellement en un bifoncteur $D^*(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \times D^*(\mathcal{C}') \to D^*(\mathcal{C}_2^{I^\circ})$ et l'on a pour $(A, B) \in D^*(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \times D^*(\mathcal{C})$ un isomorphisme bifonctoriel

$$RF(R\varprojlim_I A, B) \simeq R\varprojlim_I RF(A, B) \quad \textit{(resp. } LF(R\varprojlim_I A, B) \simeq R\varprojlim_I LF(A, B)\textit{)}$$

4. Soit $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_1$ un foncteur contravariant exact. On suppose que G transforme sommes infinies en produits infinis. Il y a alors un isomorphisme $G(\varinjlim_I A) \simeq R\varprojlim_I G(A)$, fonctoriel en $A \in D^-(\mathcal{C}'^I)$.

Preuve : 1. résulte de l'existence dans $\mathcal{C}_1^{I^\circ}$ de suffisamment de systèmes projectifs flasques au sens de [Roo61]. Comme nous en aurons l'utilité, indiquons brièvement de quoi il s'agit. On dit qu'un système projectif $A = (A_i) \in \mathcal{C}_1^{I^\circ}$ est flasque si pour pour tout $I'' \subset I' \subset I$, $\varprojlim_{I'} A \twoheadrightarrow \varprojlim_{I''} A$. Pour $A \in \mathcal{C}_1^{I^\circ}$, on définit un "effacement flasque" $A \to Fl(A)$, où $Fl(A)_i = \prod_{j \leq i} A_i$ est le système projectif évident et où les flèches $A_i \to Fl(A)_i$ sont induites par celles de A. Il est utile de noter que l'on dispose ici d'un foncteur résolvant "à la Godement" : si $Fl^\bullet : Kom^a_{naifs}(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \to Kom^{a+1}_{naifs}(\mathcal{C}_1^{I^\circ})$ est induit par Fl, on note $Fl^* : Kom(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \to Kom(\mathcal{C}_1^{I^\circ}), A^\bullet \mapsto Tot_\Pi Fl^\bullet(A^\bullet)$, où Tot_Π est le foncteur "complexe total" avec des produits (et non des sommes). On a donc $R\varprojlim A^\bullet = \varprojlim Fl^*(A^\bullet)$.

2. La construction ci-dessus montre que $R\varprojlim_I$ commute bien à Φ.

(i) On peut toujours supposer $\mathcal{C}_1 = Ab$, et invoquer [Roo61], corollaire à la proposition 5. D'après [Mil04], il faut prendre garde à la proposition 5 elle-même (reportée aussi dans [Jan88]), qui est fausse en toute généralité. Lorsque $\mathcal{C}_1 = Ab$, la version usuelle du critère de Mittag-Leffler remplace [Roo61] prop. 5 et permet cependant de conclure.

(ii) Il est bien connu que $\varprojlim_I : Comp^{I^\circ} \to Comp$ est exact. Le résultat s'en déduit aisément. On renvoie à [Jen72] pour une étude plus complète des foncteurs $R^q\varprojlim_I$.

3. Traitons le cas où F est exact à gauche dérivable à droite. Si $B^\bullet \in Kom^*(\mathcal{C})$ est un complexe à objets déployants pour RF et $A^\bullet \in Kom^*(\mathcal{C}_1^{I^\circ})$, $RF(A^\bullet, B^\bullet) := F(A^\bullet, B^\bullet) \in D^+(\mathcal{C}_2^{I^\circ})$ définit l'extension de RF (resp. LF) souhaitée. Les foncteurs $F(-, B^q)$ $(q \geq 0)$ sont exacts, et commutent aux produits infinis. Il y a donc un isomorphisme naturel de complexes triples naifs

$$F(\varprojlim Fl^\bullet(A^\bullet), B^\bullet) \simeq \varprojlim Fl^\bullet(F(A^\bullet, B^\bullet))$$

fonctoriel en $(A^\bullet, B^\bullet)$. En groupant de deux manières différentes, on obtient un isomorphisme de complexes simples, duquel se déduit celui de l'énoncé.

Le cas F exact à droite dérivable à gauche se traite de façon analogue. Expliquons la condition de dimension homologique finie : l'extension de F au complexes fait intervenir des sommes directes, alors que ci-dessus, le passage aux complexes simples fait intervenir des produits. La condition de dimension homologique finie permet de faire uniquement des produits finis.

4. Dualisons la contruction du 1. (i) : pour $A \in \mathcal{C}^I$, posons $Cofl(A) \to A$, où $Cofl(A)_i = \oplus_{j \leq i} A_i$ avec les flèches naturelles. De même, on définit $Cofl^\bullet$: $Kom^a_{naifs}(\mathcal{C}') \to Kom^{a+1}_{naifs}(\mathcal{C}')$ et $Cofl^*(A^\bullet) := Tot_\oplus Cofl^\bullet(A^\bullet)$. Comme G est exact et transforme sommes en produits, on a pour $A^\bullet \in Kom^-(\mathcal{C}')$ un isomorphisme de doubles complexes naifs

$$G(\varinjlim Cofl^\bullet(A^\bullet)) \simeq \varprojlim Fl^\bullet(G(A^\bullet))$$

dont se déduit celui de l'énoncé en prenant les complexes totaux (noter que $Tot_\Pi \circ G \simeq G \circ Tot_\oplus$).

$\square$

Remarque 2.10 *Dans le point 3., on peut jouer sur la variance en les deux variables : soit en remplaçant $\mathcal{C}'$ par sa catégorie opposée, soit en remplaçant $\mathcal{C}_1$ par sa catégorie opposée (dans ce cas, on utilise le point 4.). Ainsi, soit par exemple $F : \mathcal{C}_1' \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_2$ contravariant en la première variable et covariant en la seconde. On suppose que F est dérivable à droite, transforme sommes infinies en la première variable en produits infinis et que $\mathcal{C}'$ possède suffisamment d'objets déployants. Soit $\mathcal{C}_1$ la catégorie opposée à $\mathcal{C}_1'$, $F' : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_2$ le bifoncteur covariant déduit de F et $G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1'$ le foncteur contravariant exact induit par l'identité. Combinant 2. et 3. on obtient :*

$$\begin{aligned} RF(\varinjlim_I A, B) = RF'(G(\varinjlim_I A), B) \simeq RF'(R\varprojlim_I G(A), B) \\ \simeq R\varprojlim_I RF'(G(A), B) = R\varprojlim_I RF(A, B) \end{aligned}$$

Dans ce travail, les passages à la limites apparaissent dans deux contextes différents :

- Le plus souvent, pour former les modules d'Iwasawa : $I = N$, la catégorie des sous-groupes ouverts de Γ et $\mathcal{C}_1 = {}_\Lambda\mathcal{C}$. Par abus de langage, on parlera de la limite d'un système normique ; aussi $R\varprojlim$ désignera-t-il souvent le foncteur composé $D^+(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}) \to D^+({}_\Lambda\mathcal{C}^I) \overset{R\varprojlim}{\to} D^+({}_\Lambda\mathcal{C})$.

On dit d'un système normique $A \in \underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}$ qu'il est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ si chaque $\pi_n(A) = A_n$ l'est. On note $\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}_{tf} \subset \underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}$ la sous-catégorie des systèmes normiques de type fini, et $Kom^*(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})_{tf}$, (resp. $D^*(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})_{tf}$) la sous-catégorie pleine de $Kom^*(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$ (resp. $D^*(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$) des complexes dont les objets de cohomologie sont dans dans $\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}_{tf}$. Pour les catégories de modules l'indice tf prend sa signification habituelle. Le fait suivant se déduit de 2.9 2. (ii) :

Proposition 2.11 *Si $A \in Kom^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, alors $\varprojlim A \to R\varprojlim A$ est un isomorphisme (dans $D^+({}_{\Lambda}\mathcal{C})$).*

$\square$

Comme la restriction de $\varprojlim : {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C} \to {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ à ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$ est exacte, on voit que $\mathbb{Z}_p\underline{\otimes}- : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ (qui est l'adjoint à gauche de $\varprojlim$) vérifie la propriété suivante : Soit P un objet projectif de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, si $\mathbb{Z}_p\underline{\otimes}P$ est de type fini alors c'est un objet projectif dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$.

- Occasionnellement, pour former les modules de Tate, ou la cohomologie continue : $I = \mathbb{N}$, la catégorie des entiers naturels ordonnés, et $\mathcal{C}_1 = {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$. On conviendra alors d'indexer les systèmes projectifs par la lettre k, et on notera $R\varprojlim_k$ au lieu de $R\varprojlim_I$. Dans ce cadre, indiquons le rapport entre module de Tate et bidualité :

Lemme 2.12 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, $A_n := \pi_n A$. Alors :*

(i) $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p^k \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. Cela se produit si et seulement si chaque $\mathbb{Z}_p$-module $H^q(A_n)$ possède une suite de composition dont chaque quotient est : soit de torsion et de $\mathbb{Z}_p$-cotype fini, soit uniquement p-divisible, soit de $\mathbb{Z}_p$-type fini.

(ii) Il y a un isomorphisme et une flèche naturelle

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1] \simeq R\varprojlim_k A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p^k \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$$

c'est isomorphisme si la condition (i) est satisfaite.

(iii) Supposons (i) satisfaite. Si de plus chaque $\mathbb{Z}_p$-module $H^q(A_n)$ est de torsion, alors il y a un isomorphisme naturel $A \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$

Preuve : (i) Commençons par montrer trois faits :

(a) $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p) \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p$.

En effet, si I (resp. P) désigne le complexe de $\mathbb{Z}_p$-modules $[\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$ (resp. $[\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p]$) placé en degrés $[0,1]$ (resp. $[-1,0]$), alors

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} P, I), I) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, I), I) \otimes_{\mathbb{Z}_p} P$$

d'où le résultat annoncé.

(*b*) $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow Bid_{\mathbb{Z}_p}(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$.
En effet, si M est un $\mathbb{Z}_p$-module tué par p, alors on a simplement

$$\begin{aligned} Bid_{\mathbb{Z}_p}(M) &\simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1] \\ &\simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &\simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p), \mathbb{Z}/p) \end{aligned}$$

et l'on voit que M est de type fini si et seulement si $Bid_{\mathbb{Z}_p}(M)$ l'est ; l'assertion annoncée s'en déduit par troncature de $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p$.

(*c*) Si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$, alors $M\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow M$ possède une suite de composition comme dans l'énoncé.
L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Montrons $\Rightarrow$. Soient $M_1 \subset M_2 \subset M$ définis de la manière suivante : M_1 est le sous-module de torsion de M, et l'image de M_2 dans M/M_1 est le sous-groupe constitué des éléments infiniment p-divisibles (noter que M_2/M_1 est p-divisible, car M/M_1 est sans torsion). Alors $M_1, M_2/M_1, M/M_2$ est la suite de composition annoncée. En effet : $Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M_1, \mathbb{Z}/p) = Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p)$ est fini, donc M_1 est de cotype fini ; M_2/M_1 est uniquement p-divisible ; $M_2/M_1 = \cap_k p^k(M/M_1)$, si bien que M/M_2 est p-adiquement séparé ; comme de plus $Tor_0^{\mathbb{Z}_p}(M/M_2, \mathbb{Z}/p)$ est fini, on voit tout de suite que $\varprojlim(M/M_2)/p^k$ est de type fini, donc M/M_2 aussi.

Pour montrer (i), on fait un raisonnement en cercle :

- Si $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, alors il en est de même de $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p$, puis de $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p$, par ($a$) et ($b$).

- Si $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, alors pour tout q, on a $H^q(A_n)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{tf}$ (observer que la suite suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p$ dégénère en suites exactes courtes). D'après (c), $H^q(A_n)$ possède donc une suite de composition comme dans l'énoncé.

- Si les $H^q(A_n)$ possèdent une suite de composition comme dans l'énoncé, alors $Bid_{\mathbb{Z}_p}(H^q(A_n)) \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{tf}$ (se ramener par dévissage aux trois cas suivants : 1) si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}_{tf}$ est de torsion de cotype fini, alors $RHom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1]$ est de type fini, donc $Bid_{\mathbb{Z}_p}(M)$ aussi ; 2) si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ est uniquement p-divisible, $M\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$, puis $RHom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p) = RHom_{\mathbb{Z}_p}(M\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ et $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) = 0$; 3) si M est de type fini, alors M possède un résolution parfaite, et $M \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(M)$ est aussi de type fini), et donc $Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$.

(ii) Expliquons d'abord l'isomorphisme. Malheureusement, 2.9 3. ne suffit pas, et nous procéderons donc à la main. Soit $(P_k) \in Kom^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ (resp. $(Q_k) \in Kom^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}})$) le système projectif (resp inductif) évident des complexes $[\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z}_p]$ placés en degrés $[-1,0]$ (resp. $[0,1]$), de sorte que $(P_k) = Hom_{\mathbb{Z}_p}((Q_k), \mathbb{Z}_p)$. Pour $A \in Kom^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C})$, on a dans $Kom^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ des isomorphismes naturels

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(Cofl^*((Q_k)), A) \simeq Fl^*(Hom_{\mathbb{Z}_p}((Q_k), A)) \simeq Fl^*(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} (P_k))$$

dont celui de l'énoncé se déduit en appliquant $\varprojlim_k$ (noter le quasi-isomorphisme $\varinjlim Q_k \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$).

Passons à l'étude de la seconde flèche de l'énoncé. Dans $D^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C})$ (resp. $D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$) on a $A \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$ (resp. $(\mathbb{Z}/p^k) \leftarrow \mathbb{Z}_p$) ; d'où, dans $D^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$:

$$A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}/p^k) \xrightarrow{1} Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^k \xleftarrow{2} Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$$

(le système projectif de droite est constant). On laisse au lecteur le soin de montrer que la flèche "2" donne un isomorphisme lorsqu'on lui applique $R\varprojlim_k$ (les foncteurs π_n et d'oubli permettent de travailler dans ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ et ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ au lieu de $\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}$ et $\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$; on peut alors invoquer un argument de compacité, en mimant le raisonnement de 3.4 (iii)). La flèche de l'énoncé est donc construite.

Pour mémoire, notons que la flèche ainsi obtenue $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1] \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$ redonne la flèche de bidualité, lorsqu'on la compose avec la flèche évidente $A = RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p, A) \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1]$.

Reste à vérifier que la flèche "1" est un isomorphisme lorsque la condition (i) est vérifiée. Mais dans ce cas, l'analogue modulo p^k de (i) (a) permet d'interpréter celle-ci comme la flèche de bidualité $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^k \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^k)$, laquelle est un isomorphisme, puisque $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^k \in D^b(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$.

(iii) D'après (ii), la flèche de bidualité $A \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$ s'identifie à $A \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1]$. De là un triangle distingué

$$A \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, A)[1] \to A[1]$$

duquel on tire $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Sous nos hypothèses on a de plus $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = 0$, si bien que la flèche naturelle $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1] \to$

$A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p = A$ est un isomorphisme. Le résultat suit.

$\square$

3 Adjonction et dualité

On présente une étude de la dualité Λ-linéaire, selon une approche inspirée de [Jan89]. L'utilisation des catégories dérivées, largement influencée par [Nek06], montre ici toute son efficacité ; elle permet notamment la synthèse et la généralisation des résultats de [Vau06].

Comme on a choisi de travailler avec des Λ-modules non topologisés, il convient de faire une hypothèse de noethérianité : dans cette section et **dans tout le reste de l'article**, on fait sur Γ les hypothèses suivantes :
- $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ est noethérien.
- La dimension homologique globale de Λ est finie (ie. la p-dimension cohomologique de Γ est finie, cf [Bru66]).

La seconde hypothèse nous est imposée par le domaine de définition des divers foncteurs dérivés qu'on utilise. Elle est superflue en de nombreux endroits, si l'on agrandit précautionneusement les domaines de définition en question. Il est bien connu que la première condition est vérifiée notamment si Γ est un pro-p-groupe analytique (cf [Laz65] V.2.2.4). Lorsque de plus la seconde est vérifiée, alors Γ est automatiquement un groupe de Poincaré (*loc. cit* V.2.5.8 et ref.).

3.1 Un résultat général

Dans notre contexte, la dualité homologie/cohomologie prend la forme du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Il y a dans $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$ un isomorphisme fonctoriel en $A \in D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$:*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p$$

Preuve : D'après 2.7 (ii), il y a $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ une flèche fonctorielle en A :

$$R\underline{\Gamma}(A) \to \underline{RHom}(\mathbb{Z}_p, A)$$

Le triangle distingué tautologique $A \to A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \to A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to A[1]$ donne donc lieu donne lieu à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)[1] \\ \uparrow & & \uparrow \\ RHom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{RHom}(\mathbb{Z}_p, A), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & RHom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{RHom}(\mathbb{Z}_p, A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)[1] \end{array}$$

Les deux flèches horizontales sont des isomorphismes, car $RHom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$ s'annule sur tous les complexes dont la cohomologie est uniquement divisible. La seconde flèche verticale est un isomorphisme par 2.7 (iii). La première flèche verticale est donc elle aussi un isomorphisme, et l'on conclut en invoquant l'isomorphisme d'évaluation 2.6 2. (ii)-(iii) :

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{RHom}(\mathbb{Z}_p, A), \mathbb{Z}_p)$$

□

Théorème 3.2
On rappelle que $\underline{\Lambda} \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$ *désigne le système normique canonique* $(\mathbb{Z}_p[G_n])$.

(i) *Pour* $M \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$*, il y a dans* ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ *un isomorphisme fonctoriel :*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(M\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_\Lambda(M, \underline{\Lambda})$$

(ii) *Pour* $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$*, il y a dans* ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ *un isomorphisme fonctoriel :*

$$Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A)) \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p), \underline{\Lambda})$$

Preuve : (i) Par adjonction, puis induction, on a :

$$\begin{aligned} RHom_{\mathbb{Z}_p}(M\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) &\simeq R\underline{Hom}(M, RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)) \\ &\simeq R\underline{Hom}(M, \mathbb{Z}_p) \\ &\simeq RHom_\Lambda(M, \underline{Coind}\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$: $\underline{\Lambda} \simeq \underline{Coind}\mathbb{Z}_p$.

(ii) Appliquant $RHom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$ au lemme 3.1, on obtient dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$:

$$Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A)) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$$

On conclut par (i), appliqué à $M = RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$.

$\square$

Corollaire 3.3 *Il y a dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ des isomorphismes fonctoriels :*

(i) *Pour $M \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$, $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim M \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_\Lambda(M, \Lambda)$.*

(ii) *Pour $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, $R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A)) \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$.*

Preuve : (i) Les compatibilités entre homomorphismes et limites donnent ici (2.9 3. et remarque) :

$$\begin{aligned} RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim M \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) &\simeq R\varprojlim RHom_{\mathbb{Z}_p}(M \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \\ &\simeq R\varprojlim RHom_\Lambda(M, \underline{\Lambda}) \\ &\simeq RHom_\Lambda(M, R\varprojlim \underline{\Lambda}) \\ &\simeq RHom_\Lambda(M, \Lambda) \end{aligned}$$

De même, (ii) découle de 3.2 en appliquant $R\varprojlim$.

$\square$

3.2 Le cas des groupes de Poincaré

Proposition 3.4 *On suppose que Γ est un groupe de Poincaré de dimension d, ie. $D(\Gamma) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[d]$ (cf. 7.3) ; alors :*

(i) *Dans $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$, fonctoriellement en $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$:*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} A, \mathbb{Z}_p)[d]$$

(ii) *Si $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})_{tf}$, alors dans $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$:*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Z}_p) \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)))[d]$$

Aussi, si $A \in {}_\Gamma\mathcal{C}$ est fini : $Hom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq R\underline{\Gamma}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))[d]$.

(iii) *Si $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, alors dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$: $RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_\Lambda(A, \Lambda)[d]$.*

Preuve : (i) Le théorème 7.3, ou plutôt 7.4 (iii), donne ici

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p \simeq R\underline{Hom}(A,\mathbb{Z}_p[d])$$

Le résultat s'en déduit via l'isomorphisme de 3.2 (i) :

$$R\underline{Hom}(A,\mathbb{Z}_p) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p\underline{\overset{L}{\otimes}}A,\mathbb{Z}_p)$$

(ii) Comme $A = Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$, le lemme 3.1 et sa version à droite donnent :

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A),\mathbb{Z}_p)$$

$$\mathbb{Z}_p\underline{\overset{L}{\otimes}}A \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)),\mathbb{Z}_p)$$

d'où le résultat de l'énoncé, en remplaçant dans (i).

Si $A \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}$ est fini, alors les groupes de cohomologie de $R\underline{\Gamma}(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p))$ le sont aussi (car Λ est noethérien ; utiliser par exemple 2.7), et l'isomorphisme de l'énoncé suit.

(iii) Par 7.4 (iii) et induction, on a dans $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$:

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)\overset{L}{\otimes}_{\Lambda}\underline{\Lambda} \simeq RHom(A,\mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p \simeq R\underline{Hom}(A,\mathbb{Z}_p[d]) \simeq RHom_{\Lambda}(A,\underline{\Lambda})[d]$$

D'après 2.9 3., $RHom_{\Lambda}(A,\Lambda) \simeq R\varprojlim RHom_{\Lambda}(A,\underline{\Lambda})$. Reste à montrer que la flèche naturelle de $D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})$

$$(*) \qquad RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p) \to R\varprojlim(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)\overset{L}{\otimes}_{\Lambda}\underline{\Lambda})$$

est un isomorphisme (ce qu'il suffit de vérifier dans $D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})$, par oubli). Maintenant les objets de cohomologie de $RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)$ sont des Λ-modules topologiques compacts, puisque d'après 2.10 et 2.9 2. (ii) :

$$Ext^q(A,\mathbb{Z}_p) \simeq R^q\varprojlim RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_i,\mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(A_i,\mathbb{Z}_p)$$

si $A = \varinjlim A_i$ avec A_i des complexes à objets de $\mathbb{Z}_p$-type fini. Par troncature du complexe $RHom_{\mathbb{Z}_p}(A,\mathbb{Z}_p)$, il suffit donc de montrer que la flèche naturelle de $D^b(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p})$

$$(**) \qquad M \to R\varprojlim(M\overset{L}{\otimes}_{\Lambda}\mathbb{Z}_p[G_n])$$

est un isomorphisme pour tout $M \in \mathcal{C}_\Lambda$ provenant par oubli de la catégorie $\mathcal{C}_{\Lambda-comp}$ des Λ-modules (à droite) topologiques compacts.

D'après [Bru66], M possède une résolution $P \to M$, où $P \in Kom^b(\mathcal{C}_{\Lambda-comp})$ est à objets projectifs (dans $\mathcal{C}_{\Lambda-comp}$). Fixons encore $L_n \to \mathbb{Z}_p[G_n]$ un système projectif de résolutions parfaites dans ${}_\Lambda\mathcal{C}$. Ont alors lieu dans $Kom^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{N^\circ})$ des quasi-isomorphismes (pour le premier, cf [Bru66] 2.1) :

$$P\hat{\otimes}\mathbb{Z}_p[G_n] \leftarrow P\hat{\otimes}_\Lambda L_n = P \otimes_\Lambda L_n \to M \otimes_\Lambda L_n$$

Ici $\hat{\otimes}_\Lambda : \mathcal{C}_{\Lambda-comp} \times {}_{\Lambda-comp}\mathcal{C} \to {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ désigne le produit tensoriel complété (il coïncide avec $\otimes_\Lambda$ lorsque le second argument est dans ${}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$, vue comme sous-catégorie pleine de ${}_{\Lambda-comp}\mathcal{C}$). Aussi $P\hat{\otimes}_\Lambda\mathbb{Z}_p[G_n] \simeq M\overset{L}{\otimes}_\Lambda\mathbb{Z}_p[G_n]$ dans $D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{N^\circ})$. Comme les objets du complexe $P\hat{\otimes}_\Lambda\mathbb{Z}_p[G_n]$ sont des systèmes projectifs de $\mathbb{Z}_p$-modules topologiques compacts, donc déployants pour $R\varprojlim$ (2.9 2. (ii)), la flèche $(**)$ est représentée par $P \to \varprojlim P \otimes_\Lambda \mathbb{Z}_p[G_n]$. C'est bien un isomorphisme, puisque les objets de P sont compacts.

□

Corollaire 3.5 *Si Γ est un groupe de Poincaré de dimension d, alors, fonctoriellement en $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$:*

$$R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p} R\underline{\Gamma}(A) \simeq Bid_\Lambda(A)[-d]$$

Preuve : On réécrit 3.3 (ii) en tenant compte de 3.4 (iii).

□

4 Descente et codescente

Si $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ est de la forme $R\underline{\Gamma}(A_\infty)$ pour un certain $A_\infty \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, la connaissance de A équivaut à celle de $\varinjlim A \simeq A_\infty$. Dans ces conditions, il y a un isomorphisme naturel, donné par le corollaire 3.3 :

$$X_\infty \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty), \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

et cela répond à la question 1.2.

Le but de cette section est la construction, pour $A \in D^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})$ quelconque, d'un triangle distingué qui généralise l'isomorphisme précédent. Comme expliqué dans l'introduction, on en donne en fait deux contructions duales, dont la comparaison aboutit à une relation non triviale entre le "défaut de descente" du sytème A et son "défaut de codescente".

4.1 Triangles de (co)-descente : $j(A)$ et $k(A)$

A chaque objet $A \in D^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})$, sont associés fonctoriellement les objets suivants :
- $A_n := \pi_n(A) \in D^b({}_{G_n}\mathcal{C})$, pour chaque $n \in N$ (cf 2.5).
- $A^* := RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$, $A_n^* := \pi_n(A^*) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_n, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{G_n})$.
- $A_\infty := \varinjlim A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$ et $A_\infty^* := \varinjlim A^* \in D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$.
- $X_\infty := R\varprojlim A \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ et $X_\infty^* := R\varprojlim A^* \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$.

On rappelle que pour $A \in Kom^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$, la flèche canonique $\varprojlim A \to X_\infty$ est un isomorphisme dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ (2.11), ie. $H^q(X_\infty) \simeq \varprojlim H^q(A_n)$. Commençons par un critère de noethérianité pour X_∞ et X_∞^*.

Lemme 4.1 *Soit Γ_n un sous-groupe ouvert de Γ.*
1. Soit $A \in \underline{_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$, alors $X_\infty = \varprojlim A \in {}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$ si et seulement si $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty$ est de $\mathbb{Z}_p$-type fini. Si c'est le cas, alors $\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{tf}$.
2. Soit $A \in D^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$, alors :

(i) $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ si et seulement si $\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty \in D^b({}_{G_n}\mathcal{C})_{tf}$.

(ii) $X_\infty^* \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ est si et seulement $RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{G_n})_{tf}$. Cela se produit si et seulement si $Ext^p_{\mathbb{Z}_p}(R^q\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ pour $p = 0, 1$, $q \in \mathbb{Z}$.

Preuve : 1. X_∞ étant profini, on peut le munir de sa topologie compacte, et celle-ci est compatible avec l'action de Λ. On applique alors la version topologique du lemme de Nakayama.
2. (i) On va appliquer 1. aux Λ-modules $H^q(X_\infty) = \varprojlim H^q(A_n)$. Observons la suite spectrale d'hypercohomologie :

$$E_2^{p,q} = Tor_{-p}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, H^q(X_\infty)) \Rightarrow Tor_{p+q}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, X_\infty) = E^{p+q}$$

Si $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$, alors les $E_2^{p,q}$ sont de type fini sur Λ, donc les E^{p+q} aussi, ie. $\mathbb{Z}_p\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}X_\infty \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{tf}$.

Réciproquement, supposons les E^{p+q} de type fini sur Λ, et montrons que les $H^q(X_\infty)$ le sont aussi. Ayant remarqué les équivalences suivantes, données par le point 1 :

$$H^q(X_\infty) \in ({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow E_2^{0,q} \in ({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow (\forall p,\ E_2^{p,q} \in ({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf})$$

on procède par récurrence descendante sur q, pour montrer que $E_2^{0,q} \in ({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ (noter que $E_2^{0,q} = 0$ pour $q >> 0$) : le terme initial $E_2^{0,q} = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} H^q(X_\infty)$ est une extension d'un sous-module de $E^q = Tor_q^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, X_\infty)$ (de type fini par hypothèse) par un Λ-module qui possède une filtration dont les graduations sont des quotients des $E_2^{-r-1,q+r} = Tor_{r+1}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, H^{q+r}(X_\infty))$, $r \geq 1$, lesquels sont noethériens par hypothèse de récurrence.

(ii) Le point précédent possède bien sûr une variante à droite ; appliquons celle-ci à $X_\infty^* = R\varprojlim A^*$. Comme $X_\infty^*\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}\mathbb{Z}_p \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$ (cf. 3.1), le résultat se lit sur la suite spectrale

$$Ext_{\mathbb{Z}_p}^p(R^{-q}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p) \Rightarrow Ext_{\mathbb{Z}_p}^{p+q}(R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$$

dans laquelle $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$.

$\square$

Passons à la construction des "triangles de descente" (resp. de codescente). Pour chaque A_n il existe dans $D^b({}_{G_n}\mathcal{C})$ un morphisme naturel de descente $j_{A,n} : A_n \to R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ (resp. de codescente $k_{A,n} : \mathbb{Z}_p\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}X_\infty \to A_n$). Il s'agit de relever cette collection de morphismes en une flèche de $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, et de munir cette dernière d'un cône fonctoriel.

Proposition 4.2 *Soit $Tr(D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}))$ la catégorie des triangles distingués de $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$.*

(i) Il existe un foncteur $j : D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}) \to Tr(D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}))$:

$$A \quad \mapsto \quad j(A) := \left(A \overset{j_A}{\to} R\underline{\Gamma}(A_\infty) \to C(j_A) \to A[1]\right)$$

tel que $\pi_n(j_A) = j_{A,n}$.

(ii) Il existe un foncteur $k : D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})_{tf} \to Tr(D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}))$ *:*

$$A \quad \mapsto \quad k(A) := \left(\mathbb{Z}_p \overset{L}{\underline{\otimes}} X_\infty \xrightarrow{k_A} A \to C(k_A) \to \mathbb{Z}_p \overset{L}{\underline{\otimes}} X_\infty[1] \right)$$

tel que $\pi_n(k_A) = k_{A,n}$.

Preuve : (i) Il suffit de construire un foncteur $\tilde{j} : Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}) \to Tr(Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}))$ préservant les quasi-isomorphismes, et qui vérifie les conditions suivantes :

- les premier et second termes du triangle $\tilde{j}(A)$ ont respectivement pour image A et $R\underline{\Gamma}(A_\infty)$ dans $D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$
- la première flèche de $\tilde{j}(A)$ a pour image $j_{A,n}$ dans $D({}_{G_n}\mathcal{C})$.

Une fois $\tilde{j}$ construit, on définit $j(A)$ comme l'image de $\tilde{j}(A)$ dans $D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$. Pour construire $\tilde{j}$, considérons $K^* : (-) : Kom^b({}_\Gamma\mathcal{C}) \to Kom^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, le foncteur résolvant construit par Verdier dans [Ser97], annexe au chapitre I. Celui-ci est muni d'un quasi-isomorphisme fonctoriel en B : $B \to K^*(B)$, et les objets du complexe $K^*(B)$ sont Γ-cohomologiquement triviaux, de sorte que $\Gamma(\Gamma_n, K^*(B))$ représente $R\Gamma(\Gamma_n, B)$. Par définition, le morphisme de descente $j_{A,n}$ est alors représenté par la flèche composée $A_n \to \Gamma(\Gamma_n, \varinjlim A) \to \Gamma(\Gamma_n, K^*(\varinjlim A))$. Comme remarqué dans les préliminaires, cette flèche respecte la structure de système normique, et donne une flèche $\tilde{j}_A : A \to \underline{\Gamma}(K^*(\varinjlim A))$ dans $Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$. A donc lieu dans $Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$ un triangle distingué tautologique, fonctoriel en $A \in Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$:

$$\tilde{j}(A) := \quad \left(A \xrightarrow{\tilde{j}_A} \Gamma(\Gamma_n, K^*(\varinjlim A)) \to C(\tilde{j}_A) \to A[1] \right)$$

Celui-ci vérifie bien les deux propriétés annoncées, et cela termine la preuve.

(ii) Fixons une fois pour toutes une résolution projective $P \to \mathbb{Z}_p$ dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$. Si $A \in Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})_{tf}$, alors $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ est représenté par $\varprojlim A$ (2.11), et la flèche de codescente $k_{A,n}$ de $D^b({}_{G_n}\mathcal{C})$, par la flèche composée : $P \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} \varprojlim A \to \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} \varprojlim A \to A_n$. Comme en (i), on note que cette dernière flèche a en fait lieu dans $Kom^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$, et donne un triangle distingué tautologique fonctoriel dont le foncteur k est déduit par localisation.

□

Remarque 4.3 *1. Soit* $A \in Kom^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$*. Alors :*

(i) Les flèches j_A *et* k_A *ne dépendent pas des résolutions qu'on a choisies. Par ailleurs, on peut aussi expliciter* k_A *à l'aide d'une résolution projective de* $\varprojlim A$ *: soit* $P \to \varprojlim A$ *une telle résolution, alors* k_A *est représentée par la flèche composée* $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} P \to \mathbb{Z}_p \underline{\otimes} \varprojlim A \to A$*.*

(ii) Remplacer $K^*(A)$ *par une autre résolution* Γ*-acyclique de* A *dans la preuve ci-dessus remplace* $j(A)$ *par un autre triangle distingué, qui lui est (non canoniquement) isomorphe. Remarque analogue pour* P *et* k_A*.*

2. Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$*, non dans* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$*. Si* A *est représenté par un complexe de* ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ *dont les objets sont acycliques pour le foncteur* $R\varprojlim$*, alors la construction de* $k(A)$ *tient encore. J'ignore si l'on peut trouver un tel complexe pour tout* $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$*.*

Remarque 4.4 *Soit* $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$*, alors 4.1 montre que :*

(i) $X_\infty \in D^b({}_{\Lambda}\mathcal{C})_{tf} \Leftrightarrow C(k_A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$*.*

(ii) $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf} \Leftrightarrow RHom_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})_{tf}$

Proposition 4.5 *Notons encore* $k : D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})_{tf} \to Tr(D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}))$ *l'analogue à droite du foncteur* k *de la proposition précédente. Si* $A^* \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$*, il y a dans* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *un diagramme commutatif, fonctoriel en* $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *:*

$$\begin{array}{ccc}
(X_\infty^* \overset{L}{\underline{\otimes}} \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_{A^*}} & A^* \\
{\scriptstyle ev}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A_\infty), \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{RHom_{\mathbb{Z}_p}(j_A, \mathbb{Z}_p)} & RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

Preuve : Soit $A \in Kom^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, tel que $A^* \in D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})_{tf}$. Si $I \in Kom^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})$ est une résolution injective de $\mathbb{Z}_p$, alors $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$ est représenté par le complexe $\varprojlim Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, I) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A, I)$. Soient maintenant $P \to \mathbb{Z}_p$ et $\varinjlim A \to K^*(\varinjlim A)$ les résolutions de la preuve précédente, et considérons le diagramme commutatif de $Kom^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$:

$$\begin{array}{ccccc}
\varprojlim Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I)\underline{\otimes}P & \to & \varprojlim Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I)\underline{\otimes}\mathbb{Z}_p & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I) \\
\uparrow & & \wr\downarrow & & id\downarrow \\
Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim K^*(A),I)\underline{\otimes}P & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A,I)\underline{\otimes}\mathbb{Z}_p & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I) \\
ev\downarrow & & ev\downarrow & & id\downarrow \\
Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{Hom}(P,K^*(\varinjlim A)),I) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{Hom}(\mathbb{Z}_p,\varinjlim A),I) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I) \\
\downarrow & & \wr\downarrow & & id\downarrow \\
Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Gamma}(K^*(\varinjlim A)),I) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Gamma}(\varinjlim A),I) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_p}(A,I)
\end{array}$$

Dans celui-ci, la ligne supérieure (resp. inférieure) représente k_{A^*} (resp. $RHom_{\mathbb{Z}_p}(j_A,\mathbb{Z}_p)$) et toutes les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes, ainsi que les flèches horizontales de gauche. On obtient le carré commutatif de l'énoncé en identifiant, dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, les deux premières colonnes, ainsi que les deux premières et les deux dernières lignes.

□

4.2 Triangles d'adjonction : $\alpha_j(A)$ et $\alpha_k(A)$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le

Théorème 4.6 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, alors*

(i) Dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, fonctoriellement en A : $C(j_A) \simeq C(j_{C(k_A)})$. Si de plus $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$, alors $Bid_{\mathbb{Z}_p}C(j_A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ et $C(k_A) \simeq C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p}C(j_A)})[-1]$.

(ii) Le foncteur j donne lieu à un triangle distingué, fonctoriel en A :

$$\alpha_j(A) := \left(X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} RHom_\Lambda(X_\infty^*,\Lambda) \to \Delta_j(A) \to X_\infty[1]\right)$$

dans lequel $\Delta_j(A) := R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$.

(iii) Le foncteur k donne lieu à un triangle distingué, fonctoriel en A :

$$\alpha_k(A) := \left(X_\infty^* \xrightarrow{\alpha_k} RHom_\Lambda(X_\infty,\Lambda) \to \Delta_k(A) \to X_\infty^*[1]\right)$$

dans lequel $\Delta_k(A) := RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1]$.

(iv) Supposons de plus $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$*, alors il y a un isomorphisme de triangles* $\alpha_j(A) \simeq RHom_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$ *fonctoriel en A, ie :*

$$\begin{array}{ccccccc}
X_\infty & \overset{\alpha_j}{\to} & RHom_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) & \to & \Delta_j(A) & \to & X_\infty[1] \\
\big\downarrow & & id \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
Bid_\Lambda(X_\infty) & \xrightarrow{RHom_\Lambda(\alpha_k, \Lambda)} & RHom_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) & \to & RHom_\Lambda(\Delta_k(A), \Lambda)[1] & \to & Bid_\Lambda(X_\infty)[1]
\end{array}$$

En particulier, $R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p), \Lambda)$.

Preuve : (i) Considérons $B := \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} X_\infty \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, et appliquons le foncteur j aux objets et flèches du triangle $k(A) = \Big(B \overset{k_A}{\to} A \to C(k_A) \to B[1]\Big)$. On obtient alors un diagramme commutatif dont chaque ligne et colonne est un triangle distingué de $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xrightarrow{j_B} & R\underline{\Gamma}(B_\infty) & \longrightarrow & C(j_B) & \longrightarrow & B[1] \\
\downarrow & & {\scriptstyle R\underline{\Gamma}(k_A)} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A & \xrightarrow{j_A} & R\underline{\Gamma}(A_\infty) & \longrightarrow & C(j_A) & \longrightarrow & A[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C(k_A) & \xrightarrow{j_{C(k_A)}} & R\underline{\Gamma}(C(k_A)_\infty) & \longrightarrow & C(j_{C(k_A)}) & \longrightarrow & C(k_A)[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
B[1] & \xrightarrow{j_B[1]} & R\underline{\Gamma}(B_\infty)[1] & \longrightarrow & C(j_B)[1] & &
\end{array}$$

Pour obtenir le premier isomorphisme de l'énoncé, il suffit de montrer que $C(j_B) = 0$, ie. que j_B est un isomorphisme. Soit $P \in Kom^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ un complexe à objets projectifs représentant X_∞. Comme les objets du complexe $\varinjlim \mathbb{Z}_p \underline{\otimes} P$ sont Γ-cohomologiquement triviaux, la flèche j_B est représentée par $\overrightarrow{\mathbb{Z}_p \underline{\otimes}} P \to$

$\underline{\Gamma}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \underline{\otimes} P)$. C'est un isomorphisme de $Kom^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, puisque les objets de P sont des facteurs directs de Λ-modules libres, et que $C(j_{\underline{\Lambda}}) = 0$.

Passons au second isomorphisme. L'hypothèse de finitude sur X_∞^* nous assure que $D := Bid_{\mathbb{Z}_p} R\underline{\Gamma}(A_\infty)$ est dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. Aussi le triangle distingué

$$Bid_{\mathbb{Z}_p}(j(A)) = \left(Bid_{\mathbb{Z}_p} A \overset{Bid_{\mathbb{Z}_p}(j_A)}{\to} D \to Bid_{\mathbb{Z}_p} C(j_A) \to Bid_{\mathbb{Z}_p} A[1] \right)$$

a-t-il lieu dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. On peut donc lui appliquer le foncteur k et cela donne en particulier un nouveau triangle distingué :

$$C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p} A}) \to C(k_D) \to C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)}) \to C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p} A})[1]$$

Comme $A \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$, il reste à montrer que $C(k_D) = 0$. Pour ce faire, nous utilisons le théorème 3.2, selon lequel $D \simeq RHom_\Lambda(X_\infty^*, \underline{\Lambda})$. Soit $P \in Kom^b(\mathcal{C}_\Lambda)$ un complexe parfait représentant X_∞^*, de sorte que le complexe $Hom_\Lambda(P, \Lambda) \in Kom^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ est parfait aussi. Mais alors k_D est représentée par $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} Hom_\Lambda(P, \Lambda) \to Hom_\Lambda(P, \underline{\Lambda})$; c'est visiblement un isomorphisme, et l'on a bien $C(k_D) = 0$.

(ii) Appliquer le foncteur $R\varprojlim \circ Bid_{\mathbb{Z}_p}(-)$ au triangle distingué $j(A)$ en donne un nouveau :

$$R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \to R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A_\infty)) \to R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p} C(j_A) \to R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)[1]$$

D'où celui de l'énoncé, compte tenu du corollaire 3.3 (ii) appliqué à $A_\infty \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, et de l'isomorphisme $A \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$.

(iii) Appliquer le foncteur $RHom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p) \circ \varinjlim$ au triangle distingué $k(A)$ en donne un nouveau :

$$X_\infty^* \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\underline{\otimes}} X_\infty, \mathbb{Z}_p) \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1] \to X_\infty^*[1]$$

D'où celui de l'énoncé, puisque d'après l'analogue à gauche de 3.3 (i) :

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\underline{\otimes}} X_\infty, \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_\Lambda(X_\infty, \Lambda)$$

(iv) Soit comme en (i), $B = \mathbb{Z}_p \overset{L}{\underline{\otimes}} X_\infty$. L'hypothèse de finitude sur X_∞ nous assure que $B, C(k_A) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. Sachant que $A \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$, $B \simeq$

$Bid_{\mathbb{Z}_p}(B)$, $C(k_A) \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(k_A))$ et $C(j_B) = 0$, on obtient en appliquant $R\varprojlim \circ Bid_{\mathbb{Z}_p}(-)$ au premier diagramme de la preuve :

$$\begin{array}{ccccccc}
R\varprojlim B & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(B_\infty)) & \to & 0 & \to & R\varprojlim B[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X_\infty & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A_\infty)) & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) & \to & X_\infty[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R\varprojlim C(k_A) & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(C(k_A)_\infty)) & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_{C(k_A)})) & \to & R\varprojlim C(k_A)[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R\varprojlim B[1] & \to & R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(B_\infty))[1] & \to & 0 & &
\end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif, chaque ligne ou colonne est un triangle distingué de $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$. De plus :
- La seconde ligne du diagramme s'identifie au triangle $\alpha_j(A)$, par construction de ce dernier.
- La seconde colonne s'identifie à $RHom_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$, comme cela résulte des isomorphismes de triangles distingués suivants (3.3) :

$$R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(\varinjlim k(A))) \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim k(A), \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

$$\simeq RHom_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$$

Pour obtenir l'isomorphisme souhaité entre les triangles $RHom_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$ et $\alpha_j(A)$, il suffit donc de montrer que $R\varprojlim C(k_A) = 0$. Mais cela relève du même argument que la preuve de 3.4 (iii).

□

Corollaire 4.7 *Si* $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ *et* $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$*, alors*

$$C(j_A) = 0 \Leftrightarrow C(k_A) = 0$$

Preuve : Cela résulte immédiatement de 4.6 (i).

$\square$

Corollaire 4.8 *Si Γ est un groupe de Poincaré de dimension d (par exemple $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^d$), alors*

$$R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) \simeq Bid_\Lambda(\varinjlim C(k_A))[-d]$$

Preuve : On réécrit simplement 4.6 (iv), à l'aide de 3.4 (iii).

$\square$

On relève un critère de noethérianité pour X_∞^*, utile en pratique :

Corollaire 4.9 *On suppose $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ et $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$. Alors $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$ si et seulement si $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$.*

Preuve : L'équivalence se lit sur le triangle distingué $\alpha_k(A)$.

$\square$

Remarque 4.10 *Pour $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ non nécessairement dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, le triangle distingué $\alpha_j(A)$ admet une généralisation évidente :*

$$R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(A) \to RHom_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) \to \Delta_j(A) \to R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)[1]$$

De la même façon, lorsqu'on est dans le cas de 4.3 (iii), il est possible de généraliser une partie des résultats.

Remarque 4.11 *Disons qu'un foncteur $F : D^b(\mathcal{C}) \to D^b(\mathcal{C}')$ covariant (resp. contravariant) est d'amplitude $[a, b]$ s'il possède la propriété suivante : "A acyclique hors de $[\alpha, \beta] \Rightarrow F(A)$ acyclique hors de $[\alpha+a, \beta+b]$ (resp. $[a-\beta, b-\alpha]$)". On a jusqu'ici défini trois foncteurs exacts covariants : $C(j_{(-)}) : D^b({}_{\underline{\Gamma}}C) \to D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, $\Delta_j : D^b({}_{\underline{\Gamma}}C)_{tf} \to D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$, $C(k_{(-)}) : D^b({}_{\underline{\Gamma}}C)_{tf} \to D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$, et un contravariant : $\Delta_k : D^b({}_{\underline{\Gamma}}C)_{tf} \to D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$. Si $cd_p\Gamma = d$, ils sont a priori d'amplitudes respectives $[-1, d+1]$, $[-1, d]$, $[-d-1, 0]$, $[-1, d+1]$ (que $\Delta_j(A)$ soit acyclique en degrés $> \beta + d$ si A l'est en degrés $\geq \beta$ se lit par exemple sur l'isomorphisme suivant : $\Delta_j(A) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim RHom_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$, compte-tenu de la nullité de $Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(H^{d+1}(\Gamma_n, H^\beta(A_\infty)), \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$ dûe à la p-divisibilité de $H^{d+1}(\Gamma_n, -)$).*

Question 4.12 *Que peut-on dire en général concernant la "taille" de $\Delta_j(A)$ et $\Delta_k(A)$? En particulier, lorsqu'on dispose d'un foncteur det, peut-on caractériser $det(\Delta_j)$ directement en termes de l'objet A ?*

Si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^d$ et $A \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}$ est de la forme $A = \mathbb{Z}_p \underline{\otimes} X_\infty$, c'est l'objet de la section suivante que de donner une condition suffisante pour avoir $\Delta_j(A) = 0$ dans $D^b({}_{\Lambda}\mathcal{C}/\{pseudo-nuls\})$. Le cas où A est quelconque reste assez mystérieux, même pour $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^d$.

Lorsque $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, $C(j_A)$ et $C(k_A)$ ont tendance à se stabiliser (en un sens adéquat, cf section 5.2) lorsque A provient de l'arithmétique (e.g. de la cohomologie d'une représentation p-adique) ; lorsque cela se produit, on parvient à une compréhension satisfaisante des quatre foncteurs de la remarque précédente.

5 Le cas commutatif : $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^d$

Dans ce paragraphe et **dans toute la suite de l'article**, on suppose que $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^d$, si bien que Λ est un anneau commutatif. On identifie donc ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_\Lambda$. L'anneau Λ est régulier de dimension $d+1$ ([Ser65]) ; on note parfois Q son corps des fractions. On désigne les pseudo-isomorphismes par le symbole $\approx$, ou au besoin $\overset{\approx}{\to}$; rappelons que $\approx$ est une relation d'équivalence sur la classe des Λ-modules de torsion. Si $M \in D^b({}_{\Lambda}\mathcal{C})$ on utilisera les notations suivantes :

$$E^q(M) := Ext^q_\Lambda(M, \Lambda) \qquad\qquad H_q(\Gamma_n, M) := Tor_q^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, M)$$

Pour un Λ-module M, on note $t_\Lambda M$ le sous-module de Λ-torsion, et $f_\Lambda M := M/t_\Lambda M$; de même avec $\mathbb{Z}_p$ au lieu de Λ. On note aussi $M[p^k] = Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p^k)$ (resp. $M/p^k = Tor_0^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p^k)$) le noyau (resp. conoyau) de la multiplication par p^k.

5.1 Δ_k et la structure des Λ-modules

Rassemblons en un lemme quelques propriétés des E^q. Pour une étude systématique de ces foncteurs, on renvoie à [Jan89].

Lemme 5.1 *Soit M un Λ-module de type fini. Alors :*
(i) E^qM est de torsion (resp. pseudo-nul) si $q \geq 1$, (resp. $q \geq 2$).

(ii) Si M est de torsion, le bord de la suite spectrale de bidualité induit un pseudo-isomorphisme canonique $M \overset{\approx}{\to} E^1E^1M$.

(iii) Si M est de torsion, alors E^1M ne possède aucun sous-module pseudo-nul.

(iv) Il existe un pseudo-isomorphisme (non canonique) $t_\Lambda M \approx E^1M$. En particulier, si M est de torsion, on a les équivalences suivantes :

$$M \approx 0 \Leftrightarrow E^1M \approx 0 \Leftrightarrow E^1M = 0$$

Preuve (esquisse) : (i) se voit par localisation, puisque la dimension homologique globale d'un corps (resp. d'un anneau principal) vaut 0 (resp. 1).

(ii) Que le bord en question soit bien défini résulte de la nullité de E^0E^0M. Qu'il soit un pseudo-isomorphisme se vérifie en localisant.

(iii) et (iv) se déduisent facilement des deux faits suivants :

- Si M est de torsion, alors $E^0M = 0$ et $E^1M \simeq Hom_\Lambda(M, Frac(\Lambda)/\Lambda)$.
- Si M est sans torsion, alors E^1M est pseudo-nul (localiser).

$\square$

Lorsque $M \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ vérifie $M\overset{L}{\otimes}_\Lambda Q = 0$ (ie. lorsque tous les modules de cohomologie de M sont de torsion), on définit l'idéal caractéristique de M par

$$\chi(M) := \prod(\mathcal{C}har H^q(M))^{(-1)^q}$$

où $\mathcal{C}har$ désigne l'idéal caractéristique au sens habituel de la théorie des modules d'Iwasawa.

Proposition 5.2 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. On suppose $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ et $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$. Alors :*

(i) $\Delta_j(A) \otimes_\Lambda Q = 0 \Leftrightarrow \Delta_k(A) \otimes_\Lambda Q = 0$.

(ii) Lorsque $\Delta_j(A) \otimes_\Lambda Q = 0$, on a $\chi(\Delta_j(A)) = \chi(\Delta_k(A))$.

Preuve : d'après 4.6 (iv), on a $\Delta_j(A) = RHom_\Lambda(\Delta_k(A), \Lambda)[1]$.

$\square$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ est concentré en degré 0, ie. $A \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$, et vérifie la condition de codescente galoisienne, version non dérivée, ie. $H^{-1}(C(k_A)) = H^0(C(k_A)) = 0$. Dans cette situation, on souhaite décrire explicitement le complexe $\Delta_k(A)$.

Lemme 5.3 *Soit* $M \in {}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$, *et* $A := \mathbb{Z}_p \underline{\otimes} M \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$, *de sorte que* $X_\infty \simeq M$. *On a alors :*
1. $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$.
2. $\Delta_k(A) \otimes_\Lambda Q = 0$, $\Delta_k(A)$ *est acyclique en degrés négatifs, et vérifie :*
 (i) $H^1(\Delta_k(A)) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \mathbb{Z}_p)$.
 (ii) $H^q(\Delta_k(A)) = E^q(X_\infty)$ *pour* $q \geq 2$.

Preuve : 1. Le triangle distingué $\alpha_k(A)$ montre que $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$ équivaut à $\Delta_k(A) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$, fait que le calcul de la cohomologie de $\Delta_k(A)$ mettra en évidence ci-dessous.

2. On souhaite calculer $\Delta_k(A) = RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1]$. Examinons le triangle distingué $k(A)$:

$$\mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} X_\infty \xrightarrow{k_A} A \to C(k_A) \to \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} X_\infty[1]$$

Par hypothèse, A est concentré en degré 0 et $H^0(k_A)$ est un isomorphisme. On obtient donc $C(k_A)[-1] \simeq \tau_{\leq -1} \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} X_\infty$, puis

$$\Delta_k(A) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq -1} \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} M, \mathbb{Z}_p)$$

Le résultat souhaité (y compris la noethérianité annoncée en 1.) est alors un cas particulier du lemme suivant, dont nous aurons à nouveau l'utilité un peu plus loin.

□

Lemme 5.4 *Soit* $M \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$, *et* $a \in \mathbb{Z}$. *Alors :*
 (i) $Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} M, \mathbb{Z}_p) = 0$ *pour* $q \leq -1 - a$.
 (ii) $Ext^{-a}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} M, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_{-a}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$.
 (iii) $Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} M, \mathbb{Z}_p) = E^q(M)$ *pour* $q \geq 1 - a$.
 (iv) *Il y a pour tout* $q \in \mathbb{Z}$ *une suite exacte naturelle*

$$Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_{q-1}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow E^q(M) \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_q(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$$

Preuve : D'après 3.3 (i), on a $Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty, \mathbb{Z}_p) \simeq E^q(X_\infty)$. Par ailleurs, la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $RHom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$: $D^b({}_\Gamma\mathcal{C}) \to D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$, appliquée à la flèche $\varinjlim \tau_{\leq a}\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M \to \varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M$ produit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{1-q}(\tau_{\leq a}\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M), \mathbb{Z}_p) & \hookrightarrow & Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq a}\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p) & \twoheadrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{-q}(\tau_{\leq a}\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M), \mathbb{Z}_p) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_{q-1}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p) & \hookrightarrow & Ext^q_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p) & \twoheadrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_q(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

Dans celui-ci, les flèches verticales extrèmes sont, selon les valeurs de q, soit nulles soit des isomorphismes. Le résultat suit.

$\square$

En pratique, l'expression de $H^1(\Delta_k(A))$ donnée par le lemme 5.3 est peu maniable. On cherche dans ce qui suit à contrôler sa taille.

Définition 5.5 *Soit $M \in {}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$ un module de torsion. On munit M de deux filtrations décroissantes fonctorielles :*
- $I^1M = \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n})$, et $I^{q+1}M = I^1(I^q(M))$ pour $q \geq 1$.
- F^1M est le noyau de l'application composée

$$M \to E^1E^1M \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p)$$

où la première flèche est celle de 5.1 (ii), et la seconde est la flèche de droite dans la suite exacte 5.4 (iv), appliquée au module E^1M. Puis $F^{q+1}M = F^1F^qM$ pour $q \geq 1$.

Remarque 5.6 *La flèche composée qui définit F^1M est pseudo-surjective, si bien que $M/F^1M \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p)$ avec conoyau pseudo-nul.*

Proposition 5.7 *Soit $M \in {}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$ un module de torsion, alors $I^qM \subset F^qM$.*

Preuve : On peut toujours supposer $q = 1$. Il s'agit alors de montrer que l'image de $\varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n})$ par l'application $M \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p)$ est nulle. C'est évident si l'on écrit cette dernière comme la limite projective des applications $M_{\Gamma_n} \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p)$.

$\square$

Question 5.8 *Est-il vrai que $I^qM = F^qM$?*

Cette question possède une réponse affirmative si $d = 1$, ie. si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$. En effet, on montre alors facilement que M/I^1M et M/F^1M sont tous deux $\mathbb{Z}_p$-libres de même rang, et le résultat suit.

Lemme 5.9 *Soient $M, M' \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{tf}$ de torsion. S'il y a un pseudo-isomorphisme $M \overset{\approx}{\to} M'$, celui-ci induit des pseudo-isomorphismes :*

(i) $I^qM \overset{\approx}{\to} I^qM'$ et $F^qM \overset{\approx}{\to} F^qM'$.

(ii) $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M'), \mathbb{Z}_p) \overset{\approx}{\to} Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$.

Preuve : (i) Soit $J = I$ ou F. Tout revient à montrer que la flèche $M/J^1M \to M'/J^1M'$ est un pseudo-isomorphisme. Or

- son conoyau est pseudo-nul, par hypothèse.

- il existe un pseudo-isomorphisme $M \overset{\approx}{\leftarrow} M'$, lequel implique à son tour une pseudo-surjection $M/J^1M \leftarrow M'/J^1M'$. En particulier $\mathcal{C}har(M/J^1M)$ divise $\mathcal{C}har(M'/J^1M')$.

- son noyau est donc nécessairement pseudo-nul lui aussi.

(ii) $M \overset{\approx}{\to} M'$ induit $E^1M' \overset{\approx}{\to} E^1M$. Comme $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$ s'identifie à un quotient de E^1M, on peut raisonner comme en (i).

$\square$

Corollaire 5.10 *Soit $M \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{tf}$ un module de torsion. Alors il existe une pseudo-surjection non canonique*

$$\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n}) \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$$

Preuve : Par 5.7, on sait déjà que $\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n}) = M/I^1M \twoheadrightarrow M/F^1M$. Mais par 5.6 :

$$M/F^1M \approx Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p)$$

Par 5.1, on peut trouver un pseudo-isomorphisme non canonique $M \approx E^1M$, et celui-ci induit à son tour 5.9 :

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1M), \mathbb{Z}_p) \approx Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$$

ce qui termine la preuve.

□

5.2 Stabilisation (cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$)

Nous étudions le phénomène de stabilisation pour le défaut de (co)-descente. Celui-ci semble particulier au cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, où les complexes $C(j_A)$ et $C(k_A)$ sont particulièrement courts. Lorsqu'elle a lieu, la stabilisation rend particulièrement agréable la description du rapport entre descente et codescente. On suppose $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ dans tout 5.2.

Définition 5.11 *(i) On dit d'un système inductif (resp. projectif) (A_n) qu'il se stabilise s'il existe un rang n_0 tel que les les flèches de transition $A_n \to A_m$ (resp. $A_m \to A_n$) soient des isomorphismes pour $m \geq n \geq n_0$.*

(ii) On dit d'un système normique $A \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ qu'il se stabilise via la restriction (resp. corestriction) si le système inductif (resp. projectif) sous-jacent se stabilise.

(iii) On dit d'un objet $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ qu'il se stabilise (via la restriction ou la corestriction) s'il en est ainsi pour ses objets de cohomologie.

Commençons par quelques faits généraux.

Lemme 5.12 *Soit $A \to B \to C \to A[1]$ un triangle distingué de $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$. Si deux des trois sommets se stabilisent via la restriction ou la corestriction, il en est de même du troisième.*

Preuve : On applique le lemme des cinq.

□

Lemme 5.13 *Soient A, B, C des systèmes inductifs de $\mathbb{Z}_p$-modules.*

(i) On suppose que les B_n sont de type fini et qu'il y a une suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$. Alors B se stabilise si et seulement si A et C se stabilisent.

(ii) On suppose que les A_n et les C_n sont de type fini, et qu'il y a une suite exacte courte $A \to B \to C$. Si A et C se stabilisent, alors B aussi.

Preuve : (i) Si A et C se stabilisent alors B aussi, clairement. Si B se stabilise, alors $A_m \hookrightarrow A_n$ pour $n \geq m >> 0$. Mais alors $\varinjlim A_n$ est une union croissante à l'intérieur du $\mathbb{Z}_p$-module noethérien $\varinjlim B_n$, donc se stabilise. On en déduit que C_n se stabilise aussi, par le lemme du serpent.

(ii) découle immédiatement de (i).

□

5.2.1 Critères de stabilisation

Pour $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, on cherche à établir des critères pour :

- la stabilisation éventuelle de $C(j_A)$ via la corestriction.

- la stabilisation éventuelle de $C(k_A)$ via la restriction.

Dans la pratique, ces deux problèmes sont équivalents. En effet :

Proposition 5.14 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, alors*

(i) Si $C(k_A)$ se stabilise via la restriction, alors $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction.

(ii) Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$, vérifiant $X_\infty^* \in D^b({}_{\Lambda}\mathcal{C})_{tf}$. Si $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction, alors $C(k_A)$ se stabilise via la restriction.

La preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.15 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, alors*

(i) Si A stabilise via la restriction, alors $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction.

(ii) On suppose $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$. Si A stabilise via la corestriction, alors $C(k_A)$ stabilise via la restriction.

Preuve de 5.15 : (i) Considérant le triangle distingué tautologique $A \to A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \to A\overset{L}{\otimes}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to A[1]$, on se ramène tout de suite au cas où A est de torsion. Par troncature et récurrence sur la longueur de A, on peut supposer que A est concentré en degré 0, et quitte à remplacer Γ par un sous-groupe ouvert, que tous les $j_{n,m}$ sont des isomorphismes. Mais alors $C(j_A)$ se réduit à la collection $(H^1(\Gamma_n, A_\infty))$ (munie de sa structure naturelle de système normique, via res et cor) placée en degré 1. L'action de Γ sur A_∞ étant triviale, on voit tout de suite que $cor : H^1(\Gamma_m, A_\infty) \to H^1(\Gamma_n, A_\infty)$ est un isomorphisme pour tout $m \geq n$, et cela termine la preuve.

(ii) A l'aide de 4.5 appliqué à A^*, on construit facilement un isomorphisme $RHom_{\mathbb{Z}_p}(C(j_{A^*}), \mathbb{Z}_p) \simeq C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)})$; comme $A \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(A)$, le résultat souhaité se déduit de (i).

$\square$

Preuve de 5.14 : (i) Comme $C(j_A) = C(j_{C(k_A)})$ (cf 4.6 (i)), il suffit d'appliquer 5.15 (i) à l'objet $C(k_A) \in D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$.

(ii) Puisque $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction, alors $Bid_{\mathbb{Z}_p}C(j_A)$ aussi. Comme $C(k_A) \simeq C(k_{Bid_{\mathbb{Z}_p}C(j_A)})[-1]$ (4.6 (i)), il suffit d'appliquer 5.15 (ii) à l'objet $Bid_{\mathbb{Z}_p}C(j_A) \in D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})$.

$\square$

Remarque 5.16 *Soit $A \in D^b(\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}})_{tf}$.*

(i) Comme $\varinjlim C(j_A) = 0$, la stabilisation de $C(j_A)$ via la restriction ne présente aucun intérêt. Aussi, on dira désormais simplement "$C(j_A)$ se stabilise" au lieu de "$C(j_A)$ se stabilise via la corestriction". Pour des raisons similaires, on dira "$C(k_A)$ se stabilise" au lieu de "$C(k_A)$ se stabilise via la restriction".

(ii) Il ne faut pas croire que la stabilisation de $C(j_A)$ ou $C(k_A)$ se produise systématiquement. Pour s'en convaincre, observer le cas d'un système normique dont la limite inductive et la limite projective soient toutes deux triviales.

Au vu de 5.14, on s'intéresse désormais uniquement à la stabilisation de $C(k_A)$. La proposition suivante est très utile :

Proposition 5.17
1. Soit $A \to B \to C \to A[1]$ un triangle distingué de $D^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})$. Si $C(k_A)$ et $C(k_B)$ se stabilisent, alors il en est de même de $C(k_C)$.
2. Soit $A \in D^b(\underline{_\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$ tel que $X_\infty \in D^b(_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$. Sont alors équivalents :
(i) $C(k_A)$ se stabilise.
(ii) $C(k_{H^q(A)})$ se stabilise pour tout q.

Pour la preuve, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 5.18 *Soit $A \in \underline{_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$. Si $X_\infty \in {_\Lambda}\mathcal{C}_{tf}$, alors $H^{-2}(C(k_A))$ se stabilise automatiquement.*

Preuve : Le système inductif sous-jacent à $(H^{-2}(C(k_A))) \in \underline{_\Gamma}\mathcal{C}$, s'identifie à la réunion croissante des $H_1(\Gamma_n, X_\infty) \simeq X_\infty^{\Gamma_n}$, et celle-ci se stabilise par noethérianité.

□

Preuve de 5.17 : 1. On applique 5.12 au triangle distingué

$$C(k_A) \to C(k_B) \to C(k_C) \to C(k_A)[1]$$

déduit de celui de l'énoncé par application du foncteur $C(k_{(-)})$.

2. Par troncature et récurrence sur la longueur de A, l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ découle du point 1.

Passons à l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit q_0 tel que $H^q(A) = 0$ pour $q > q_0$ et considérons le triangle distingué

$$C(k_{\tau_{\leq q_0 - 1}A}) \to C(k_A) \to C(k_{H^{q_0}(A)}) \to C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})[1]$$

déduit du triangle distingué tautologique par application du foncteur $C(k_{(-)})$. Par récurrence sur la longueur de A, il nous suffit de montrer que si $C(k_A)$ se stabilise, alors il en est de même de $C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})$ et $C(k_{H^{q_0}(A)})$. On peut toujours supposer $q_0 = 0$. Soit donc A tel que $H^q(A) = 0$ pour $q > 0$, tel que $C(k_A)$ se stabilise. D'après la remarque 4.11, $H^q(C(k_{\tau_{\leq -1}A})) = 0$ (resp. $H^q(C(k_A)) = 0$, $H^q(C(k_{H^0(A)})) = 0$) si $q > -1$ (resp. $q > 0$, $q \neq -2, -1, 0$). En prenant le cohomologie du triangle distingué ci-dessus, on obtient donc :

- $H^0(C(k_{H^0(A)})) = H^0(C(k_A))$, se stabilise par hypothèse.
- Pour $q < -2$ $H^q(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) = H^q(C(k_A))$, se stabilise par hypothèse.

- Une suite exacte

$$H^{-2}(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) \hookrightarrow H^{-2}(C(k_A)) \to H^{-2}(C(k_{H^0(A)}))$$
$$\to H^{-1}(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) \to H^{-1}(C(k_A)) \twoheadrightarrow H^{-1}(C(k_{H^0(A)}))$$

dans laquelle le second et le cinquième terme se stabilisent par hypothèse, ainsi que troisième en vertu de 5.18. Par 5.13, on conclut à la stabilisation des 6 termes de la suite exacte, et cela termine la preuve.

□

Pour appliquer 5.17 2., on a parfois recours au lemme suivant :

Lemme 5.19 *Soit $q_0 \in \mathbb{N}$, et $Z_1 \hookrightarrow Z_2 \to \ldots \to Z_q \to \ldots \twoheadrightarrow Z_{q_0}$ une suite exacte à q_0 termes dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Alors il existe un triangle distingué (non unique) de $D^b(\mathcal{A})$ dont la suite exacte longue de cohomologie s'identifie à la précédente.*

Preuve (indication) : Par récurrence sur q_0.

□

Corollaire 5.20 *Soit $q_0 \in \mathbb{N}$, et $A^1 \hookrightarrow A^2 \to \ldots \to A^q \to \ldots \twoheadrightarrow A^{q_0}$ une suite exacte à q_0 termes dans $\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$. On suppose que chaque Λ-module $\varprojlim_n A^q_n$ est de type fini. Soit $i \in \{1,2,3\}$, si $C(k_{A^q})$ se stabilise pour q non congru à i modulo 3, alors $C(k_{A^q})$ se stabilise aussi pour q congru à i modulo 3.*

Preuve : On applique 5.17 2., 1., puis 2. à un triangle distingué fourni par le lemme précédent. Il est naturellement possible d'établir ce corollaire directement, en procédant par découpage (il faut alors considérer $q_0 - 3$ suites exactes à 9 termes, et appliquer systématiquement 4.11, 5.18 et 5.13).

□

Proposition 5.21 *Soit $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte courte dans $\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$. On suppose que $\varprojlim B_n$ est de type fini sur Λ, et que $C(k_B)$ se stabilise. Sont alors équivalents :*

(i) $H^0C(k_A)$ se stabilise.
(ii) $H^{-1}C(k_C)$ se stabilise.
(iii) $C(k_A)$ et $C(k_C)$ se stabilise.

Preuve de 5.21 : Comme $(iii) \Rightarrow((i)$ et $(ii))$, il suffit de montrer que $((i)$ ou $(ii)) \Rightarrow (iii)$. On note d'abord que (iii) équivaut à la stabilisation de $H^0(C(k_C))$ et $H^{-1}(C(k_C))$ (5.18 et 5.17 1.).

Ensuite, on observe la suite exacte suivante de systèmes inductifs de $\mathbb{Z}_p$-modules de types finis (NB : $\varprojlim A_n$, $\varprojlim B_n$ et $\varprojlim C_n$ sont de Λ-type fini) :

$$H^{-1}(C(k_B)) \to H^{-1}(C(k_C)) \to H^0(C(k_A)) \to H^0(C(k_B)) \to H^0(C(k_C)) \to 0$$

Par hypothèse, le premier et le quatrième terme se stabilisent. Si de plus le second ou le troisième se stabilisent aussi, alors il en est de même des 2 termes restants par 5.13.

$\square$

5.2.2 Conséquences de la stabilisation

Signalons qu'on fait dans ce paragraphe un usage systématique de la dualité de Poincaré ; les isomorphismes en jeu sont donc fonctoriels, mais dépendent de l'isomorphisme $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ choisi.

Proposition 5.22 *Soit $A \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ tel que $X_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$.*

Si $C(k_A)$ se stabilise, alors :

1. (i) $X^*_\infty \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$ et $RHom_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$.

(ii) $C(j_A)$ se stabilise aussi.

2. Les modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ et $\Delta_k(A)$ sont fixés par Γ_n pour n suffisamment grand (et sont donc de torsion sur Λ). De plus il y a des isomorphismes fonctoriels :

(i) $\Delta_k(A) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_j(A), \mathbb{Z}_p) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim C(j_A), \mathbb{Z}_p)$.

(ii) $\Delta_j(A) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_k(A), \mathbb{Z}_p) \simeq \varinjlim C(k_A)[-1]$.

(iii) Il existe dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ un triangle distingué fonctoriel :

$$R\varprojlim C(j_A) \to \varinjlim C(k_A)[-1] \to RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, R\varprojlim C(j_A))[1] \to R\varprojlim C(j_A)[1]$$

En particulier, $R\varprojlim C(j_A) \simeq \varinjlim C(k_A) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-2]$.

3. Si de plus les $\mathbb{Z}_p$-modules $H^q(A_n)$ sont tous de torsion (et donc finis), alors

(i) les Λ-modules de cohomologie de X_∞ et X^*_∞ sont de torsion.

(ii) $\chi(\Delta_j(A)) = \chi(\Delta_k(A)) = \Lambda$.

Preuve : 1. (i) Comme A et $\mathbb{Z}_p\overset{L}{\underline{\otimes}}X_\infty$ sont dans $D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$, on voit que $C(k_A)$ et $RHom_{\mathbb{Z}_p}(C(k_A),\mathbb{Z}_p)$ le sont aussi. Mais alors l'hypothèse de stabilisation montre que les modules de cohomologie sont de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, et donc sur Λ. La première assertion provient alors de 4.9, et la seconde de 4.4 (ii).

(ii) résulte de 5.14 (i).

2. Que la cohomologie de $\Delta_j(A) = R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$ et celle de $\Delta_k(A) = RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A),\mathbb{Z}_p)[1]$ soit fixée par Γ_n pour $n >> 0$ est une conséquence immédiate de la stabilisation des limites en jeu.

(i) D'après 4.6 (iv) et 3.4 (iii), on a

$$\Delta_j(A) \simeq RHom_\Lambda(\Delta_k(A),\Lambda)[1] \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_k(A),\mathbb{Z}_p)$$

d'où le premier isomorphisme de l'énoncé. Pour obtenir le second, on observe que la flèche de bidualité $C(j_A) \to Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$ induit dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)),\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim C(j_A),\mathbb{Z}_p) \\
\uparrow & & \uparrow \\
RHom_{\mathbb{Z}_p}(Bid_{\mathbb{Z}_p}\pi_n(C(j_A)),\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & RHom_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(j_A),\mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

dans lequel la flèche inférieure est un isomorphisme puisque la cohomologie de $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(j_A),\mathbb{Z}_p)$ est de $\mathbb{Z}_p$-type fini. Ici, π_n est le foncteur de projection de la remarque 2.5, et on regarde $\pi_n C(j_A)$ comme un objet de $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$, par abus de notation. Par stabilisation, les deux flèches verticales sont des isomorphismes pour n suffisamment grand ; d'où le second isomorphisme de l'énoncé.

(ii) est similaire, mais plus facile.

(iii) En combinant (i) et (ii), on obtient un isomorphisme

$$Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim C(j_A)) \simeq \varinjlim C(k_A)[-1]$$

Maintenant, l'analogue dans $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$ de 2.12 (ii) montre que $Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim C(j_A))$ s'identifie à $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, R\varprojlim C(j_A))[1]$; le triangle distingué recherché provient donc du triangle distingué tautologique $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p[1]$.

L'isomorphisme de l'énoncé suit, puisque $RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, R\varprojlim C(j_A))\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ $= 0$ et $R\varprojlim C(j_A) \simeq R\varprojlim C(j_A)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$.

3. Quitte à s'y ramener par troncature et récurrence sur la longueur de A, on peut toujours supposer que A est concentré en degré 0. Dans ce cas :

(i) X_∞ (resp. X_∞^*) est concentré en degré 0 (resp. 1), et la cohomologie du triangle distingué $\alpha_k(A)$ donne une suite exacte :

$$0 \to E^0(X_\infty) \to H^0(\Delta_k(A)) \to H^1(X_\infty^*) \to E^1(X_\infty)$$

sur laquelle il apparaît que :

- $E^0(X_\infty)$ est de torsion, puisque $H^0(\Delta_k(A))$ l'est (cf 2.). D'où en fait $E^0(X_\infty) = 0$, si bien que X_∞ est de Λ-torsion.

- $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ-torsion puisque $H^0(\Delta_k(A))$ et $E^1(X_\infty)$ le sont (cf 5.1 (i)).

(ii) Il suffit de calculer $\chi(\Delta_k(A))$ (cf. 5.2) Regardant $\pi_n C(k_A)$ comme un objet de $D^b({}_\Lambda\mathcal{C})$, on a pour n suffisamment grand un isomorphisme dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$: $\Delta_k(A) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(k_A), \mathbb{Z}_p)$. Observons alors le triangle distingué $\pi_n(C(k_A)) \in Tr(D^b({}_\Lambda\mathcal{C}))$:

$$\mathbb{Z}_p\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}X_\infty \to A_n \to \pi_n C(k_A) \to \mathbb{Z}_p\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}X_\infty[1]$$

Comme A_n est fini, on voit que $\chi(\pi_n C(k_A)) = \chi(\mathbb{Z}_p\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}X_\infty)$. Ce dernier idéal caractéristique est trivial puisque X_∞ est de Λ-torsion. Finalement, $\chi(\Delta_k(A)) = \Lambda$.

$\square$

En vue des applications on se propose d'expliciter la proposition précédente. Rappelons que si M est un $\mathbb{Z}_p$-module, $Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p)$ s'identifie naturellement au dual de Pontryagin du sous-module de $\mathbb{Z}_p$-torsion de M. Avec les conventions expliquées dans la section 2.1, ce dernier est muni de l'action de Λ (à droite) par transport de structure ($(f.\lambda)(m) = f(\lambda m)$), lorsque M est un Λ-module (à gauche).

Proposition 5.23 *Soit $A = (A_n)$ un système normique dans lequel les A_n sont de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Comme toujours, on note $X_\infty = \varprojlim A_n$, $A_\infty = \varinjlim A_n$ et $X_\infty^* = RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$. Pour plus de clarté, notons*

$$j_n : A_n \to (A_\infty)^{\Gamma_n} \qquad \text{(resp. } k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \to A_n\text{)}$$

l'application de descente (resp. codescente). De sorte que les systèmes normiques formés par la cohomologie de $C(j_A)$ et $C(k_A)$ valent respectivement :

- Pour $C(j_A)$: $H^{-1} = (Ker\, j_n)$, $H^0 = (Coker\, j_n)$, $H^1 = (H^1(\Gamma_n, A_\infty))$, $H^2 = (H^2(\Gamma_n, A_\infty))$ et $H^q = 0$ si $q \neq -1, 0, 1, 2$.

- Pour $C(k_A)$: $H^{-2} = (H_1(\Gamma_n, X_\infty))$, $H^{-1} = (Ker\, k_n)$, $H^0 = (Coker\, k_n)$ et $H^q = 0$ si $q \neq -2, -1, 0$.

On suppose que $Ker\, k_n$ et $Coker\, k_n$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, et se stabilisent. Alors :

1. X_∞ est de type fini sur Λ, et $H^q(C(j_A))$ se stabilise aussi, $\forall q$.

2. (i) $\forall q$, on a $H^q(\Delta_j(A)) \simeq \varinjlim H^{q-1}(C(k_A))$ et il y a une suite exacte courte

$$\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k \hookrightarrow H^q(\Delta_j(A)) \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^{q+1}(C(j_A))[p^k]$$

où $(-)[p^k]$ (resp. $(-)/p^k$) désigne le plus grand sous-module (resp. quotient) tué par p^k.

(ii) $\forall q$, on a $H^q(\Delta_k(A)) \simeq Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim H^{1-q}(C(j_A)), \mathbb{Z}_p)$ et il y a une suite exacte courte

$$Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{-q}(C(k_A)), \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow H^q(\Delta_k(A)) \to Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{-1-q}(C(k_A)), \mathbb{Z}_p)$$

(iii) Pour tout q, $H^q(\Delta_j(A))) \approx E^1 H^{-q}(\Delta_k(A)))$. De plus les Λ-modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ sont tous pseudo-isomorphes à un quotient convenable de $\mathbb{Z}_p[G_n]^a$, pour n et a suffisamment grand.

(iv) Si les A_n sont finis, alors $\prod_q \mathcal{C}har(H^q(\Delta_k(A)))^{(-1)^q} = \Lambda$.

3. Les Λ-modules $H^0(X^*_\infty) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ et $H^1(X^*_\infty) = Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ sont de type fini et le second est de torsion. Il sont de plus sujets à des isomorphismes et des suites exactes :

(i) $E^{q+1}(H^1(X^*_\infty)) \hookrightarrow E^q(X^*_\infty) \twoheadrightarrow E^q(H^0(X^*_\infty))$.

(ii) $H^{-1}(\Delta_j(A)) \hookrightarrow X_\infty \to E^0(X^*_\infty) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_j(A))$.

et $E^1(X^*_\infty) \simeq H^1(\Delta_j(A))$.

(iii)
$$H^{-1}(\Delta_k(A)) \hookrightarrow H^0(X^*_\infty) \to E^0(X_\infty) \to H^0(\Delta_k(A)) \to$$
$$\to H^1(X^*_\infty) \to E^1(X_\infty) \twoheadrightarrow H^1(\Delta_k(A))$$

et $E^2(X_\infty) \simeq H^2(\Delta_k(A))$.

Preuve : Expliquons seulement les points qui ne découlent pas immédiatement de 5.22.

2. (i) Pour obtenir la suite exacte, il faut expliciter l'isomorphisme $\Delta_j(A) \simeq R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$. On procède en deux étapes : d'abord 2.12 (ii) donne une suite spectrale à valeurs dans ${}_{\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_k Tor_{-p}^{\mathbb{Z}_p}(H^q(C(j_A)), \mathbb{Z}/p^k) \Rightarrow H^{p+q}(Bid_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))) = E^{p+q}$$

Celle-ci dégénère en des suites exactes courtes, dont celles de l'énoncé se déduisent par passage à la limite projective.

(ii) La stabilisation de $C(j_A)$ assure que les objets de cohomologie de $R\varprojlim C(j_A)$ sont de $\mathbb{Z}_p$-torsion, et 5.22 2. (i) donne l'isomorphisme annoncé.

(iii) Comme les Λ-modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ sont de type fini et de torsion, le bord de la suite spectrale d'hypercohomologie (cf 4.6 (iv))

$$E_2^{p,q} = E^{p+1}H^{-q}(\Delta_k(A)) \Rightarrow H^{p+q}(\Delta_j(A)) = E^{p+q}$$

réalise pour tout q un pseudo-isomorphisme

$$H^q(\Delta_j(A)) \overset{\approx}{\to} E^1H^{-q}(\Delta_k(A))$$

Le reste se déduit du fait que $H^q(\Delta_j(A))$ est fixé par Γ_n pour n suffisamment grand.

3. Que $H^1(X_\infty^*)$ soit de Λ-torsion se lit sur la suite exacte (iii), compte-tenu de 2. (iii) et 5.1 (i).

(ii) La suite exacte de l'énoncé, obtenue en prenant la cohomologie du triangle distingué $\alpha_j(A)$, commence *a priori* par

$$0 \to E^{-1}(X_\infty^*) \to H^{-1}(\Delta_j(A)) \to H^0(X_\infty) \to \dots$$

Maintenant $E^{-1}(X_\infty^*) = E^0(H^1(X_\infty^*))$ est trivial puisque $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ-torsion.

□

Corollaire 5.24 *Soit $A = (A_n) \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$. Si tous les A_n sont de $\mathbb{Z}_p$-torsion, et que $C(k_A)$ se stabilise, alors :*

(i) *les Λ-modules $X_\infty = \varprojlim A_n$ et $H^1(X_\infty^*) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion.*

(ii) *Non canoniquement, les quatre modules suivants sont pseudo-isomorphes : $H^{-1}(\Delta_j(A)), H^0(\Delta_j(A)), H^0(\Delta_k(A))$ et $H^1(\Delta_k(A))$.*

Preuve : (i) Comme les A_n sont de $\mathbb{Z}_p$-torsion, c'est que X_∞^* est concentré en degré 1. Maintenant, $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ-torsion (5.23 3.) et les modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ aussi (2. (iii)) ; il en est donc de même de X_∞.

(ii) D'après 5.23 2. (iii), il suffit de vérifier que l'on a $\chi(H^1(\Delta_k(A))) = \chi(H^0(\Delta_k(A)))$. Mais cela découle de 5.23 2. (iv), puisque d'après 5.23 3. (iii) $H^{-1}(\Delta_k(A)) \subset H^0(X_\infty^*) = 0$, $H^2(\Delta_k(A)) \simeq E^2(X_\infty) \approx 0$ (5.1 (i)).

$\square$

Mentionnons encore un corollaire de la description 5.22 2.

Corollaire 5.25 *Soit $A \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$ et supposons, comme en 5.22, que les systèmes inductifs $Ker\, k_n$ et $Coker\, k_n$ se stabilisent. Notons*

$$\phi : R\varprojlim C(j_A) \to \varinjlim C(k_A)[-1]$$

le morphisme fonctoriel figurant dans le triangle 5.22 2. (iii). Alors :
1. (i) $Ker\, H^q(\phi)$ est p-divisible.
(ii) $Coker\, H^q(\phi)$ est $\mathbb{Z}_p$-libre.
2. Considérons un triangle distingué $A \to A' \to A'' \to A[1]$, où A' et A'' vérifient les mêmes hypothèses que A. Dans ces conditions, pour $q \in \mathbb{Z}$ fixé :
(i) ϕ induit un isomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccc}
\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \to & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A'}))/p^k & \to & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A''}))/p^k \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \to & t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_{A'})) & \to & t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_{A''}))
\end{array}$$

(ii) Si $\varprojlim H^q(C(j_{A''}))$ est fini, alors le diagramme ci-dessus se prolonge en un isomorphisme de suites exactes longues :
- à gauche à l'aide de l'isomorphisme $\Delta_j(-) \simeq \varinjlim C(k_{(-)})[1]$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \to & H^{q-1}(\Delta_j(A')) & \to & H^{q-1}(\Delta_j(A'')) & \to & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \to \\
& & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\dots & \to & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A'})) & \to & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A''})) & \to & t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \to
\end{array}$$

- *à droite à l'aide de* $R\varprojlim C(j_{(-)}) \simeq \varinjlim C(k_{(-)}) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-2]$ *:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A''}))/p^k & \to & \varprojlim H^{q+1}C(j_A) & \to & \varprojlim H^{q+1}C(j_{A'}) & \to & \ldots \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \\
t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_{A''})) & \to & Tor_{q-1}^{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \to & Tor_{q-1}^{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_{A'}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \to & \ldots
\end{array}$$

Preuve : 1. est clair, puisque les modules de cohomologie du cône de ϕ sont uniquement p-divisibles.

2. (i) Comme $H^q(C(j_A))$ est de $\mathbb{Z}_p$-torsion et que $H^q(C(k_A))$ est de type fini, on peut préciser 1. : $Ker\, H^q(\phi)$ est le sous groupe p-divisible maximal de $H^q(R\varprojlim C(j_A))$ (ie. le noyau de $\varprojlim H^q(C(j_A)) \to \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k$) et $Im\, \phi = t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_A))$. D'où l'isomorphisme de suites exactes de l'énoncé.

(ii) - Au vu de 5.23 2. (i), 5.22 2. (ii) et de la définition de ϕ, le diagramme commutatif suivant se produit en toute généralité :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \to & H^{q-1}(\Delta_j(A'')) & \to & H^q(\Delta_j(A)) & \overset{\supseteq}{\leftarrow} & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \to \\
 & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\ldots & \to & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A''})) & \to & \varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \overset{\supseteq}{\leftarrow} & t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H^{q-1}(C(k_{A'})) & \to
\end{array}$$

Puisque par hypothèse $H^{q-1}(\Delta_j(A''))$ est fini (5.23 2. (i)), l'image des flèches de gauche est incluse dans celle des flèches de droite. Le diagramme de l'énoncé est donc bien défini et ses lignes sont automatiquement exactes.

- De manière analogue, on peut prolonger le diagramme à droite comme indiqué dans l'énoncé, à condition que $\varprojlim H^q(C(j_{A''})) \to \varprojlim H^{q+1}(C(j_A))$ se factorise par le quotient fini maximal $\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k$. C'est ici le cas, puisque par hypothèse, $\varprojlim H^q(C(j_{A''}))$ est lui-même fini.

$\square$

6 Applications

6.1 Cohomologie galoisienne continue

6.1.1 Généralités

Soit G un groupe profini, muni d'une surjection fixée $G \twoheadrightarrow \Gamma$. Pour chaque sous-groupe ouvert Γ_n de Γ, notons H_n l'image réciproque de Γ_n dans G, et $H_\infty = \cap H_n$. Ainsi, $G_n = \Gamma/\Gamma_n = G/H_n$, et $\Gamma = G/H_\infty$. On note ${}_G\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules munis d'une action discrète de G, et $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G)$ la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations continues de G dont le $\mathbb{Z}_p$-module sous-jacent est $\mathbb{Z}_p$-libre de rang fini. La définition [Jan88] pour la cohomologie continue se prête à la variante suivante :

Définition 6.1 *Soit $* = b$ si $cd_pG < \infty$, et $* = +$ sinon.*

(i) Soit $\underline{\Gamma}(G,-) : {}_G\mathcal{C} \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ le foncteur qui à $M \in {}_G\mathcal{C}$ associe le système normique (M^{H_n}). On note $R\underline{\Gamma}(G,-) : D^*({}_G\mathcal{C}) \to D^*({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ le dérivé droit de $\underline{\Gamma}(G,-)$.

(ii) Soit ${}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ la catégorie des systèmes projectifs d'objets de ${}_G\mathcal{C}$ indexés sur $\mathbb{N}$. On note $R\underline{\Gamma}(G,-) : D^*({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}) \to D^*({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ le foncteur composé

$$ {}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{R\underline{\Gamma}(G,-)} {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{R\varprojlim_{\mathbb{N}}} {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C} $$

(iii) Si T est une $\mathbb{Z}_p$-représentation continue de G, on note $R\underline{\Gamma}(G,T) := R\underline{\Gamma}(G,(T/p^k))$, où (T/p^k) désigne le système projectif évident.

Remarque 6.2 *(i) Soit $A \in D^*({}_G\mathcal{C})$ et $(A) \in D^*({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ le système projectif de valeur constante A. On a alors $R\underline{\Gamma}(G,A) = R\underline{\Gamma}(G,(A))$. Plus généralement, si $A \in {}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ est un système projectif qui se stabilise, sa cohomologie au sens (ii) coïncide avec la cohomologie de sa limite, au sens (i).*

(ii) Si l'image de G dans $Aut_{\mathbb{Z}_p}(T)$ est finie, on peut donner un sens à $R\underline{\Gamma}(G,T)$ soit par (i) soit (iii). On convient systématiquent du sens (iii) lorsque G est un groupe de Galois du type G_F ou $G_{S,F}$ (cf 6.1.2).

(iii) Soit K^* un foncteur résolvant, au sens de [Ser97], Annexe 2. def 1.4, et notons $C_k^\bullet = K^*(T/p^k)$. Alors la collection des résolutions $T/p^k \to C_k^\bullet$ est organisée en système projectif, et donne donc une résolution dans ${}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ $(T/p^k) \to C^\bullet$, où $C^\bullet = (C_k^\bullet) \in Kom^+({}_G\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ} = Kom^+({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$.
Celle-ci vérifie :

$(*)$ Les G-modules C_k^q sont G-cohomologiquement triviaux.

$(**)$ Les systèmes projectifs $(\underline{\Gamma}(C_k^q)) \in ({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ}$ sont flasques.
Aussi, $R\underline{\Gamma}(G,T)$ est représenté par $\varprojlim_k \underline{\Gamma}(G, C_k^\bullet) \in Kom^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$.

(iv) Comme expliqué dans [Jan88], le propriétés $(*)$ et $(**)$ ci-dessus sont vérifiées par toute résolution injective $(T/p^k) \to I^\bullet$, $I^\bullet \in Kom^+({}_G\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ}$. On en déduit que $R\varprojlim_k \circ R\underline{\Gamma}$ est aussi le dérivé droit du foncteur composé $\varprojlim \circ \underline{\Gamma}$.

(v) Bien sûr, on retrouve la cohomologie continue de H_n en appliquant le foncteur π_n de 2.5 : $\pi_n R\underline{\Gamma}(G,T) \simeq R\Gamma(H_n, T)$.

(vi) En considérant le cône de la multiplication par p^t : $(T/p^k) \to (T/p^k)$, on voit tout de suite qu'il y a isomorphisme naturel $R\underline{\Gamma}(G,T)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}/p^t \simeq R\underline{\Gamma}(G, T/p^t)$; mieux, la collection de ces isomorphismes pour t variable se relève en un isomorphisme de $D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}^{\mathbb{N}})$, d'où en passant à la limite inductive :

$$R\underline{\Gamma}(G,T)\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq R\underline{\Gamma}(G, T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \qquad \text{dans } D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$$

On renvoie à [Jan88] pour les propriétés générales de la cohomologie continue, et la comparaison avec la définition de [Tat76] (par cochaînes continues). On se contente de détailler le résultat suivant, qui reflète essentiellement la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie continue pour la collection des extensions de groupes $H_n \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_n$:

Proposition 6.3 *Soit $T \in Rep_{\mathbb{Z}_p}(G)$, et notons $A := R\underline{\Gamma}(G,T) \in D^*({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$. Alors $C(j_A) = 0$.*

Preuve : On note k l'indice des systèmes projectifs sur $\mathbb{N}$ et n ou m celui des systèmes projectifs sur N, sous-jacents aux objets de ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$. Il s'agit de vérifier que la flèche de restriction $res_n : R\Gamma(H_n, T) \to R\Gamma(\Gamma_n, \varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G,T))$ est un isomorphisme (NB : avec les notations expliquées plus haut, la cohomologie de $\varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G,T)$ vaut $\varinjlim_m H^\bullet(H_m, T)$).

Soit $C^\bullet = (C_k^\bullet) \in Kom^+({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ un complexe qui possède les propriétés $(*)$ et $(**)$ (cf 6.2). Les objets $R\Gamma(H_n,T)$ et $\varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G,T)$ sont alors représentés respectivement par $\varprojlim_k C_k^{\bullet H_n}$ et $\varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{\bullet H_m}$, et il nous suffit de montrer que les objets de ce dernier complexe sont Γ_n-acycliques. En effet, si c'est le cas la flèche res_n est alors représentée (cf 4.3) par la flèche suivante :

$$\varprojlim_k C_k^{\bullet H_n} \to (\varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{\bullet H_m})^{\Gamma_n}$$

qui est visiblement un isomorphisme.

Calculons donc, pour $p \geq 1$:

$$H^p(\Gamma_n, \varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{qH_m}) \simeq \varinjlim_m H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, \varprojlim_k C_k^{qH_m})$$

$$\text{par } (**) \qquad \simeq \varinjlim_m H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, R\varprojlim_k C_k^{qH_m})$$

Maintenant,

$$H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, R\varprojlim_k C_k^{qH_m}) = Ext^p_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}(\mathbb{Z}_p, R\varprojlim_k C_k^{qH_m})$$

$$\text{par 2.10} \qquad \simeq R^p\varprojlim_k RHom_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}(\mathbb{Z}_p, C_k^{qH_m})$$

Mais d'après $(*)$, $C_k^{qH_m}$ est Γ_n/Γ_m-acyclique, si bien que

$$R^p\varprojlim_k RHom_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}(\mathbb{Z}_p, C_k^{qH_m}) \simeq R^p\varprojlim_k (C_k^{qH_m})^{\Gamma_n/\Gamma_m}$$

$$\simeq R^p\varprojlim_k C_k^{qH_n}$$

$$\text{par } (**) \qquad \simeq 0$$

Ainsi, $H^p(\Gamma_n, \varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{qH_m}) \simeq 0$ pour $p \geq 1$, et cela termine la preuve.

□

6.1.2 Un calcul d'adjoint à la Jannsen

Soit F un corps de nombres, et F_∞/F une extension galoisienne de groupe Γ. Soit S un ensemble de places de F (fini ou non) contenant celles qui se ramifient dans F_∞/F. On note $G_S = G_{S,F}$ le groupe de Galois de la clôture S-ramifiée de F, et G_{S,F_n} le sous-groupe qui fixe F_n. Nous sommes donc dans la situation du paragraphe précédent avec $G = G_S \twoheadrightarrow \Gamma$, $H_n = G_{S,F_n}$.

Théorème 6.4 *Si $cd_p G_S < \infty$, alors :*
(i) $R\varprojlim Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(G_{S,F_n}, T)) \simeq RHom_\Lambda(RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim R\underline{\Gamma}(G_{S,F}, T), \mathbb{Z}_p), \Lambda)$
(ii) Si S est fini, $R\underline{\Gamma}(G_{S,F_n}, T) \simeq Bid_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(G_{S,F_n}, T))$.

Preuve : (i) résulte de 4.10, compte-tenu de 6.3.

(ii) Lorsque S est fini, on a $R\underline{\Gamma}(G_S, T) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ (cf [Tat76] cor. prop. 2.1).

$\square$

Corollaire 6.5 *Si S est fini et $cd_pG_S < \infty$, il y a une suite spectrale à valeurs dans ${}_\Lambda\mathcal{C}$:*

$$Ext^p_\Lambda(Hom_{\mathbb{Z}_p}(H^q(G_{S,F_\infty}, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \Lambda) \Rightarrow \varprojlim H^{p+q}(G_{S,F_n}, T)$$

Preuve : Notons qu'il y a un isomorphisme naturel

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim R\underline{\Gamma}(G_{S,F}, T), \mathbb{Z}_p)) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim R\underline{\Gamma}(G_{S,F}, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))$$

La suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $RHom_\Lambda(-,\Lambda)$, à coefficients dans $Hom_{\mathbb{Z}_p}(H^q(G_{S,F_\infty}, T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ donne donc le résultat, compte-tenu de 6.4.

Remarque 6.6 *Cette suite spectrale fait l'objet d'une note non publiée de Jannsen [Jan03]. Elle y est obtenue "à la main" indépendamment de nos hypothèses (selon lesquelles Λ est noethérien, $cd_p\Gamma < \infty$ et $cd_pG_S < \infty$).*

6.2 Le groupe des (p)-classes dans les ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions

On conserve les notations du paragraphe précédent, mais on suppose désormais $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_p}^d$, $S = S_p \cup S_\infty$ et $p \neq 2$ si F possède une place réelle (ces conditions assurent $cd_pG_S \leq 2$). Comme première illustration des méthodes de cet article, on se propose d'établir le théorème 6.7 ci-dessous et ses corollaires. On peut voir cette étude comme un analogue partiel de [LFMNQD05] pour les ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions.

Les résultats qui suivent (6.7, 6.8 et 6.9) ont été obtenus en collaboration avec J. Nekovář. Leur preuve occupe toute la présente section.

La taille des groupes de décomposition de Γ joue un rôle important dans notre étude. Notons $S^{dec} = \{v \in S_p(F), \Gamma_v = 0\}$ et considérons l'hypothèse suivante :

(Dec_a) Pour tout $v \in S_p(F)$, $rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_v \geq a$.

(ainsi $(Dec_1) \Leftrightarrow S^{dec} = \emptyset$). Soit encore $Z := Ker\left(\oplus_{v\in S_p(F),\Gamma_v\neq 0}\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]] \to \mathbb{Z}_p\right)$.

Théorème 6.7 *Notons $\mathcal{C}l'_n := \mathcal{C}l(\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]) \otimes \mathbb{Z}_p$.*

(i) Les Λ-modules $\varprojlim \mathcal{C}l'_n$ et $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion. De plus, il existe une morphisme naturel naturel (défini en 4.6) :

$$\alpha_k : Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to E^1(\varprojlim \mathcal{C}l'_n)$$

et un pseudo-isomorphisme (non canonique) $Ker\alpha_k \approx Coker\alpha_k$.

(ii) $Ker\,\alpha_k \hookrightarrow E^1(Z)$. En particulier, α_k est un pseudo-isomorphisme injectif si l'hypothèse (Dec_2) est vérifiée.

Corollaire 6.8

(i) $\mathcal{C}har(\varprojlim \mathcal{C}l'_n) = \mathcal{C}har(Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))$. De plus :

$$\varprojlim \mathcal{C}l'_n \approx 0 \Leftrightarrow \varinjlim \mathcal{C}l'_n = 0$$

(ii) Désignons par $(\varprojlim \mathcal{C}l'_n)^0$ le sous-module pseudo-nul maximal de $\varprojlim \mathcal{C}l'_n$ et considérons l'application de capitulation $j_n : \mathcal{C}l'_n \to (\varinjlim_m \mathcal{C}l'_m)^{\Gamma_n}$. Sous (Dec_2), il y a une suite exacte canonique :

$$\varprojlim_n Ker\, j_n \hookrightarrow (\varprojlim \mathcal{C}l'_n)^0 \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} Coker\, j_n[p^k]$$

Corollaire 6.9 *(comp. [Nek06] 9.4.11). Notons $E'_n := \mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]^\times \otimes \mathbb{Z}_p$. Alors :*

(i) $t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \approx Z$, non canoniquement.

(ii) Sous (Dec_3), il y a un isomorphisme naturel :

$$Coker\alpha_k \simeq t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

Principe de la preuve de 6.7 : Considérons les systèmes normiques naturels $\mathcal{C}l' = (\mathcal{C}l'_n) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$ et $E' = (E'_n) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$. Prouver 6.7 revient à expliciter la suite exacte longue de cohomologie de $\alpha_k(\mathcal{C}l')$. Pour cela, nous utiliserons les systèmes normiques auxiliaires suivants :

- $R\Gamma_S := R\underline{\Gamma}(G_S, \mathbb{Z}_p(1)) \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ (cf 6.1).
- $H^q_S := H^q(R\underline{\Gamma}_S) = (H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1))) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$, $q = 1, 2$.
- $Br' := (Br'_n) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$, où $Br'_n = \varprojlim_k H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))[p^k]$ le module de Tate du groupe de Brauer de $\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]$.
- $\underline{\Lambda}_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]\underline{\otimes}\mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n}) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$, où Γ_v est le groupe de décomposition de Γ en v. Concrètement, $k_{m,n} : \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_m} \to \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n}$ (resp. $j_{n,m} : \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n} \to \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_m}$) est la flèche induite par l'identité (resp. la multiplication par $\sum_{g\in\Gamma_n/\Gamma_m} g$).
- $\underline{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p\underline{\otimes}\mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p) \in {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_{tf}$. Concrètement, $k_{m,n} = id$ et $j_{n,m} = [\Gamma_n : \Gamma_m]$.

Résumons en un lemme les relations qui existent entre ces différents objets :

Lemme 6.10 *Il y a dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$ des triangles distingués :*
(i) $H^1_S[-1] \to R\Gamma_S \to H^2_S[-2] \to H^1_S$.
(ii) $\mathcal{C}l' \to H^2_S \to Br' \to \mathcal{C}l'[1]$. *De plus,* $H^1_S \simeq E'$.
(iii) $Br' \to \oplus_{v|p}\underline{\Lambda}_v \to \underline{\mathbb{Z}}_p \to Br'[1]$.

Preuve (esquisse) : La suite exacte de Kummer (resp. le principe de Hasse) donne lieu à un isomorphisme et une suite exacte (resp. une suite exacte) :

$$E'_n \simeq H^1(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \qquad \mathcal{C}l'_n \hookrightarrow H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \twoheadrightarrow Br'_n$$

$$Br'_n \hookrightarrow \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p[[G_n/G_{n,v}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$$

compatibles à la restriction et à la corestriction.

□

Pour $A \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ ou $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$, on note $A_\infty(A)$, $X_\infty(A)$, $A^*_\infty(A)$, $X^*_\infty(A)$ les objets notés simplement A_∞, X_∞, A^*_∞, X^*_∞ dans le paragraphe 4.1. Commençons par deux lemmes.

Lemme 6.11 *(i)* $C(j_{R\Gamma_S}) = 0$, *et* $X^*_\infty(R\Gamma_S) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{tf}$.
(ii) $C(k_{R\Gamma_S}) = 0$, *et* $X_\infty(R\Gamma_S) \in D^b({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$.
(iii) $\Delta_k(R\Gamma_S) = \Delta_j(R\Gamma_S) = 0$.

Preuve : Tout provient de la proposition 6.3, moyennant 4.4 et 4.7.

□

Lemme 6.12 *Soit* $Br'_{non-dec} := Ker(\underset{v \notin S^{dec}}{\oplus} \underline{\Lambda}_v \to \underline{\mathbb{Z}}_p)$, *de sorte que le module* Z *de* 6.9 *s'identifie naturellement à* $X_\infty(Br'_{non-dec})$. *Alors :*
(i) Il y a dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{tf}$ *un triangle distingué naturel :*

$$Br'_{non-dec} \to Br' \to \oplus_{v \in S^{dec}}\underline{\Lambda} \to Br'_{non-dec}[1]$$

lequel induit $Z = X_\infty(Br'_{non-dec}) \simeq t_\Lambda X_\infty(Br')$ *et* $f_\Lambda(X_\infty(Br')) \simeq \oplus_{v \in S^{dec}}\Lambda$.
(ii) On a $X^*_\infty(Br'_{non-dec}) = 0$, $\Delta_j(Br'_{non-dec}) \simeq \Delta_j(Br') \simeq Z[1]$ *et* $\Delta_k(Br') \simeq \Delta_k(Br'_{non-dec}) \simeq RHom_\Lambda(Z, \Lambda) \simeq \tau_{\geq 1}RHom_\Lambda(X_\infty(Br'), \Lambda)$.
(iii) Sous (Dec_a), *on a* $Ext^q(X_\infty(Br'), \Lambda) = 0$ *pour* $q \leq a-1$. *En particulier,* $X_\infty(Br') \approx 0 \Leftrightarrow (Dec_2)$.

Preuve : (i) Comme $S^{dec} \subsetneq S$, la projection naturelle $Br' \to \oplus_{v\in S^{dec}}\underline{\Lambda}$ est surjective, d'où le triangle distingué de l'énoncé. Le reste suit.

(ii) Ayant remarqué que :

- si $v \notin S^{dec}$, alors $A_\infty(\underline{\Lambda}_v)$ est uniquement p-divisible, et donc $X^*_\infty(\underline{\Lambda}_v) = RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty(\underline{\Lambda}_v), \mathbb{Z}_p) = 0$.
- $X^*_\infty(\underline{\mathbb{Z}}_p) = 0$.

on voit que $X_\infty(Br'_{non-dec}) = 0$. Comme par ailleurs $\Delta_k(\underline{\Lambda}) = \Delta_j(\underline{\Lambda}) = 0$, le résultats de l'énoncé se déduisent facilement de (i), en appliquant les foncteurs α_j et α_k aux objets et aux flèches du triangle distingué de (i).

(iii) Comme $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]] = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]} \mathbb{Z}_p \in {}_\Lambda\mathcal{C}$, on a dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$:

$$RHom_\Lambda(\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]], \Lambda) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \Lambda) \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}\Lambda$$

Maintenant, $RHom_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]) \simeq \mathbb{Z}_p[-d_v]$ et $RHom_\Lambda(\mathbb{Z}_p, \Lambda) \simeq \mathbb{Z}_p[-d]$ où d_v (resp. d) désigne le rang de Γ_v (resp. Γ) (cf 3.4 (iii)). Aussi 6.10 (iii) donne-t-il un triangle distingué de $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$:

$$\mathbb{Z}_p[-d] \to \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]][-d_v] \to RHom_\Lambda(X_\infty(Br'), \Lambda) \to \mathbb{Z}_p[1-d]$$

D'où la première assertion de l'énoncé. L'assertion concernant la pseudo-nullité résulte de 5.1 (iv).

□

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter le théorème 4.6 appliqué au système normique H^2_S. Pour plus de lisibilité, et en vue de références futures, on adopte les notations suivantes :

- $H^q_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) := \varprojlim H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) = H^q(X_\infty(R\Gamma_S)) \simeq X_\infty(H^q_S)$.
- $\mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) := \varinjlim H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) = H^q(A_\infty(R\Gamma_S)) \simeq A_\infty(H^q_S)$.
- $j^q_n : H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \to \mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))^{\Gamma_n}$, de sorte que $H^0(j_{H^q_S}) = (j^q_n)$.
- $k^q_n : H^q_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))_{\Gamma_n} \to H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1))$, si bien que $H^0(k_{H^q_S}) = (k^q_n)$.

Proposition 6.13

1. Les Λ-modules $H^q_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$, $Ext^p_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$, $p = 0, 1$, $q = 1, 2$, sont tous de type fini.

2. (i) $C(j_{H^2_S}) \simeq C(j_{H^1_S})[2]$ (resp. $C(k_{H^2_S}) \simeq C(k_{H^1_S})[2]$) est acyclique hors de $[-1, d-1]$ (resp. $[-d-1, -2]$).

Explicitement :

(ii) $Ker\, j_n^1 = Coker\, j_n^1 = 0$, $Ker\, k_n^2 = Coker\, k_n^2 = 0$.
(iii) $Ker\, j_n^2 = H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$, $Coker\, j_n^2 = H^2(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$, $H_2(\Gamma_n, H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = Ker\, k_n^1$, $H_1(\Gamma_n, H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = Coker\, k_n^1$.
(iv) Pour $q \geq 1$ *on a,*

$$H^q(\Gamma_n, \mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = H^{q+2}(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$$

$$H_{q+2}(\Gamma_n, H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = H_q(\Gamma_n, H^1_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$$

3. (i) $\Delta_k(H^2_S) = \Delta_k(H^1_S)[-2]$ *est acyclique hors de* $[1, d+1]$.
(ii) Les modules de cohomologie de $\Delta_k(H^2_S)$ *sont noethériens de torsion. De plus :*
- $H^q(\Delta_k(H^2_S))$ *est pseudo-nul si* $q \neq 1$.
- $H^1(\Delta_k(H^2_S)) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))), \mathbb{Z}_p)$.

(iii) $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) = E^0(H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$. *En particulier,* $H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ *et* $\varprojlim Br'_n$ *possède le même* Λ*-rang. Explicitement, il y a un isomorphisme naturel* $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) \simeq \oplus_{v \in S^{dec}} \Lambda$.
(iv) Il y a une suite exacte naturelle

$$Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow E^1(H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) \twoheadrightarrow H^1(\Delta_k(H^2_S))$$

(v) Pour $q \geq 2$, $H^q(\Delta_k(H^2_S)) = E^q(H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$.
4. (i) $\Delta_j(H^2_S) = \Delta_j(H^1_S)[2]$ *est acyclique hors de* $[-1, d-1]$.
(ii) Les modules de cohomologie de $\Delta_j(H^2_S)$ *sont noethériens de torsion. De plus :*
- $H^q(\Delta_j(H^2_S))$ *est pseudo-nul si* $q \neq -1$.
- $H^{-1}(\Delta_j(H^2_S)) \approx E^1(H^1(\Delta_k(H^2_S)))$.

(iii) Il y a des suites exactes naturelles

$$H^{-1}(\Delta_j(H^2_S)) \hookrightarrow H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \to E^0(X^*_\infty(H^2_S)) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_j(H^2_S))$$

$$E^1(Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)) \hookrightarrow E^0(X^*_\infty(H^2_S)) \twoheadrightarrow E^0(Hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p))$$

$$\varprojlim Ker\, j_n^2 \hookrightarrow H^{-1}(\Delta_j(H^2_S)) \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} Coker j_n^2[p^k]$$

$$\varprojlim_{n,k} (Coker j_n^2)/p^k \hookrightarrow H^0(\Delta_j(H^2_S)) \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))[p^k]$$

(iv) Pour $q \geq 1$, *il y a un isomorphisme*

$$E^{q+1}(Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)) \simeq H^q(\Delta_j(H^2_S))$$

Preuve : 1. est une conséquence directe de 6.11 (i) et (ii).
Le point (i) de 2., 3., 4. résulte de 6.11 (iii), 6.10 (i) et 4.11.

2. (ii) - (iv) découlent immédiatement de 2. (i). Ces résultats sont en fait bien connus, et peuvent aussi se lire sur des suites spectrales convenables (e.g. [Kat06] 2.3 pour la codescente).

3. (ii) D'après 2. (ii), la flèche de descente $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} X_\infty(H^2_S) \to H^2_S$ est un isomorphisme, et l'on peut donc appliquer 5.3.

4. (ii), on raisonne comme en 5.23 2. (iii).

Le reste de l'énoncé exprime essentiellement la cohomologie des triangles distingués $\alpha_k(H^2_S)$ et $\alpha_j(H^2_S)$, aux exceptions suivantes près :

3. (iii) Comme $\mathcal{C}l'_n$ est fini, la suite exacte de Kummer (cf 6.10) montre que $Hom_{\mathbb{Z}_p}(Br', \mathbb{Z}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(H^2_S, \mathbb{Z}_p)$. La description explicite de l'énoncé résulte donc de 6.12 (i).

4. (iii) Pour obtenir les deux dernières suites exactes, on raisonne comme en 5.23 2. (i).

□

Dans la proposition 6.13, on s'est attaché à expliciter la cohomologie des triangles distingués $\alpha_j(A)$ et $\alpha_k(A)$ avec $A = H^2_S$. Pour avoir une vision complète de la situation, il conviendrait de faire de même avec $A = H^1_S$, puis de recoller les deux avec $R\Gamma_S$. A défaut d'écrire les détails d'une étude aussi fastidieuse, on se contente d'évoquer deux points significatifs.

Corollaire 6.14 *(i) $H^1_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq E^0(RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p))$.*

(ii) Il y a une suite exacte naturelle

$$H^1(\Delta_k(H^2_S)) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) \to E^0(H^1_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$$
$$\to H^2(\Delta_k(H^2_S)) \to \mathbb{Z}_p(1)$$

En particulier, $H^1(\Delta_k(H^2_S)) \simeq t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p)$.

Preuve : Pour (i) (resp. (ii)), on écrit un morceau de la suite exacte longue de cohomologie de $\alpha_j(H^1_S)$ (resp. $\alpha_k(H^1_S)$), compte-tenu de 6.13 4. (i). La dernière assertion résulte de la suite exacte, puisque $t_\Lambda E^0(H^1_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = 0$, et que $H^1_S \simeq E'$ (6.10 (ii)).

□

Le résultat suivant est l'ingrédient principal pour la preuve de 6.7.

Proposition 6.15 *Il existe des pseudo-isomorphismes non canoniques*

$$Z \approx H^1(\Delta_k(H^2_S)) \approx H^{-1}(\Delta_j(H^2_S))$$

En particulier $(Dec_2) \Leftrightarrow H^1(\Delta_k(H^2_S)) \approx 0 \Leftrightarrow H^{-1}(\Delta_j(H^2_S)) \approx 0.$

Preuve : Pour ne pas exclure le cas où (Dec_1) n'est pas vérifiée, introduisons $H^2_{S,dec}$, le noyau de la flèche composée $H^2_S \to Br' \to \oplus_{v \in S^{dec}} \underline{\Lambda}$. On a alors deux triangles distingués naturels

$$H^2_{S,non-dec} \to H^2_S \to \oplus_{v \in S^{dec}} \underline{\Lambda} \to H^2_{S,non-dec}[1]$$

$$\mathcal{C}l' \to H^2_{S,non-dec} \to Br'_{non-dec} \to \mathcal{C}l'[1]$$

sur lesquels on lit les faits suivants :

- $C(k_{H^2_{S,non-dec}}) \simeq C(k_{H^2_S})$. En particulier, $\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} X_\infty(H^2_{S,non-dec}) \simeq H^2_{S,non-dec}$.
- $\Delta_k(H^2_S) \simeq \Delta_k(H^2_{S,non-dec})$.
- $f_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty(H^2_{S,non-dec})_{\Gamma_n}) \simeq f_{\mathbb{Z}_p}((H^2_{S,non-dec})_n) \simeq (Br'_{non-dec})_n$.

D'après 6.13 3. (iii), le Λ-module $M := X_\infty(H^2_{S,non-dec})$ est de Λ-torsion. On peut donc lui appliquer 5.3 2. (i) et 5.10, et cela donne une pseudo-surjection non-canonique $Z \simeq \varprojlim M_{\Gamma_n} \to H^1(\Delta_k(H^2_{S,non-dec})) \simeq H^1(\Delta_k(H^2_S))$.

Mais $H^1(\Delta_k(H^2_S)) \simeq t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p)$ (6.14 (ii)), or d'après [Nek06] 9.4.11 (iii),

$$\mathcal{C}har(Z) \mid \mathcal{C}har(t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p))$$

(noter que $Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$). Le noyau de la pseudo-surjection précédente est donc nécessairement pseudo-nul. D'où le premier pseudo-isomorphisme de l'énoncé. Le reste suit, grâce à 6.13 4. (ii) et 6.12 (iii).

$\square$

Corollaire 6.16

(i) $Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$ *ne possède aucun sous-module pseudo-nul.*

(ii) Sous (Dec_2), $H^{-1}(\Delta_j(H^2_S))$ *est le sous-module pseudo-nul maximal de* $H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$.

Preuve : (i) Au vu de 6.13 3. (iv), il suffit de montrer que $E^1(X_\infty(H^2_S))$ ne possède aucun sous-module pseudo-nul. Mais d'après la preuve de 6.15, $X_\infty(H^2_S)$ est somme directe d'un Λ-module libre et du Λ-module de torsion $X_\infty(H^2_{S,non-dec})$. D'où $E^1(X_\infty(H^2_S)) \simeq E^1(X_\infty(H^2_{S,non-dec}))$, et le résultat par 5.1 (iii).

(ii) Le Λ-module $Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$ étant de torsion (6.13 3. (iv) et 5.1 (i)), les deux premières suites exactes de 6.13 4. (iii), jointes à 5.1 (iii), montrent que le sous-module pseudo-nul maximal de $H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ est contenu dans $H^{-1}(\Delta_j(H^2_S))$. D'où le résultat, par 6.15.

$\square$

Preuve de 6.7 : (i) Comme $\mathcal{C}l' = Ker(H^2_S \to Br')$, 6.13 1. et 3. (iii) montrent que $\varprojlim \mathcal{C}l'_n$ est noethérien de torsion. Que le module

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H^1(X^*_\infty(\mathcal{C}l')) \simeq Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$$

soit noethérien de torsion résulte de 6.13 1., 3. (iv) et 5.1 (i).

Comme $X_\infty(\mathcal{C}l')$ est de Λ-torsion, la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué $\alpha_k(\mathcal{C}l')$ s'écrit

$$0 \to H^0(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \to H^1(X^*_\infty(\mathcal{C}l')) \to E^1(X_\infty(\mathcal{C}l')) \to H^1(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \to 0$$

La flèche centrale est celle notée α_k dans l'énoncé, et il reste à montrer que les deux termes extrèmes sont pseudo-isomorphes.

Appliquer Δ_k à 6.10 (ii) donne un triangle distingué dont la suite exacte longue de cohomologie s'écrit :

$$\begin{aligned} H^0(\Delta_k(H^2_S)) \to H^0(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \to H^1(\Delta_k(Br')) \qquad\qquad & (***) \\ \to H^1(\Delta_k(H^2_S)) \to H^1(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \to H^2(\Delta_k(Br')) & \end{aligned}$$

Dans celle-ci, le premier terme est trivial (6.13 3. (i)), et le dernier est pseudo-nul (6.12 (ii) et 5.1 (i)). Maintenant, 6.15, 5.1 (iv) et 6.12 (ii) donnent, non-canoniquement :

$$H^1(\Delta_k(H^2_S)) \approx t_\Lambda X_\infty(Br') \approx E^1(X_\infty(Br')) \simeq H^1(\Delta_k(Br'))$$

Comme $t_\Lambda X_\infty(Br')$ est pseudo-semi-simple, la suite exacte précédente montre que $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}l'))$ et $H^1(\Delta_k(\mathcal{C}l'))$ le sont aussi, et qu'ils possèdent le même idéal caractéristique. D'où $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \approx H^1(\Delta_k(\mathcal{C}l'))$, non canoniquement.

(ii) Puisque $X_\infty(\mathcal{C}l')$ est de torsion (cf (i)), c'est que $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}l')) = Ker\,\alpha_k$. Mais d'après 6.12 (ii)

$$H^1(\Delta_k(Br')) \simeq E^1(X_\infty(Br')) \simeq E^1(Z)$$

et la suite exacte $(***)$ ci-dessus donne donc l'injection de l'énoncé : $Ker\,\alpha_k \hookrightarrow E^1(Z)$. Si l'hypothèse (Dec_2) est vérifiée, 6.12 (iii) montre qu'en fait, $E^1(Z) = 0$, et cela termine la preuve.

□

Preuve de 6.8 : (i) résulte directement de 6.7. 6.16 (i).

(ii) En toute généralité, la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué $\alpha_j(\mathcal{C}l')$ s'écrit

$$0 \to H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}l')) \to X_\infty(\mathcal{C}l') \to E^1(H^1(X^*_\infty(\mathcal{C}l'))) \to H^0(\Delta_j(\mathcal{C}l')) \to 0$$

Dans celle-ci :

- Le troisième terme ne possède aucun sous-module pseudo-nul non nul (5.1 (iii)).

- La flèche centrale coïncide avec $E^1(\alpha_k)$; sous (Dec_2), c'est un pseudo-isomorphisme et le premier terme est donc pseudo-nul.

Aussi, $(\varprojlim \mathcal{C}l'_n)^0 \simeq H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}l'))$.

La suite exacte de l'énoncé est semblable à 5.23 2. (i).

□

Preuve de 6.9 : (i) a été établi au cours de la preuve de 6.15.

(ii) Sous (Dec_3), on a $H^1(\Delta_k(Br')) = H^2(\Delta_k(Br')) = 0$ (6.12 (iii)). Le raisonnement de 6.7 (i) donne alors

$$Coker\,\alpha_k \simeq H^1(\Delta_k(\mathcal{C}l')) \simeq H^1(\Delta_k(H^2_S)) \simeq t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

□

Remarque 6.17 *1. (i) L'équivalence de 6.8 (i), longtemps suspectée, avait déjà été établie dans [NQDV05], conditionnellement à la conjecture de Gross pour chaque F_n ; la preuve reposait alors de façon cruciale sur les résultats de [LFMNQD05]. Des résultats partiels figurent aussi dans [LNQD00] et [McC01], voir [NQDV05] à ce sujet.*

(ii) La divisibilité $\mathcal{C}har(Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}l'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \mid \mathcal{C}har(\varprojlim \mathcal{C}l'_n)$ *était déjà connue ([Nek06] (prop. 9.4.1. (iii)). La preuve de 6.15 présentée ici repose d'ailleurs sur les résultats de [Nek06] 9.4.*

(iii) Sous (Dec_2)*, 6.15 est en fait indépendant de [Nek06] 9.4. Dans le cas général, une réponse positive à la question 5.8 engloberait le résultat de* loc. cit.. *On peut se demander si une adaptation des méthodes de* loc. cit *permettrait de répondre à 5.8 ; nous espérons y revenir dans un travail ultérieur.*

2. Pour $T = \mathbb{Z}_p(0)$*, 6.16 (i) possède un analogue bien connu, relié à la conjecture de Leopoldt faible. Celui-ci est originellement dû à [Gre78], et [NQD84] en a donné une autre preuve. On pourra aussi consulter [Nek06] 9.3.1 pour un résultat général.*

3. La proposition 6.14 (i) montre que $f_\Lambda H^1_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ *est réflexif, et (ii) pourrait être le point de départ d'une discussion sur la réflexivité du module* $f_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$*. Il serait sans doute intéressant de comparer cette approche avec celle de [Gre06].*

Toute la présente étude concerne les modules d'Iwasawa attachés à la $\mathbb{Z}_p$-représentation continue $T = \mathbb{Z}_p(1)$. Pour $T = \mathbb{Z}_p(i)$, l'étude analogue présente quelques différences dont la plus marquante est peut-être la description du sous-module pseudo-nul maximal de $H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$: pour $i \geq 2$, celui-ci vaut tout simplement $\varprojlim Ker\, j^2_n$. Cette remarque est à rapprocher du fait suivant : les méthodes de [Vau05], [Vau08] permettent de produire des éléments de $Ker\, j_n \subset H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(i))$ (pour n fixé) seulement pour $i \geq 2$, et non pour $i = 1$.

Question 6.18 *Est-il possible d'adapter les méthodes de [Vau05], [Vau08] pour produire des éléments du sous-quotient* $\varprojlim_{n,k} Coker\, j^2_n[p^k]$ *de* $H^2_{Iw}(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ *?*

Une réponse positive à cette question demanderait certainement la construction préalable de systèmes projectifs d'unités le long de sous-extensions bien choisies de F_∞.

6.3 Descente et codescente dans la tour cyclotomique

On propose ici une étude systématique de la (co-)descente pour les systèmes normiques usuels de la théorie d'Iwasawa cyclotomique. On retrouve ainsi de façon concise et unifiée de nombreux résultats connus ([Kuz72], [Gre94], [LFMNQD05], [Bel02], [KN95], [NQDL06], [Gre73] et [Iwa83]). Pour simplifier, on suppose $p \neq 2$.

L'approche axiomatique présente l'avantage de mettre en lumière les hypothèses dont dépendent les résultats. On ne fait ici aucun usage de la conjecture principale. Par ailleurs, l'étude est essentiellement indépendante de la conjecture de Leopoldt (th. de Baker-Brumer, dans notre contexte), à l'exception du corollaire 6.35. Les propriétés "arithmétiques" qu'on utilise systématiquement sont rassemblées dans le lemme 6.22.

Le phénomène de stabilisation joue un rôle important. Il est automatique pour les systèmes normiques qui proviennent de la cohomologie de $\mathbb{Z}_p(1)$; Pour les unités cyclotomiques, l'étude repose entièrement sur un résultat préalable de [Bel02] (cf 6.21).

Fixons F un corps de nombres abélien, et considérons sa $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F. Comme toujours, $\Gamma_n = Gal(F_\infty/F_n)$, $\Gamma/\Gamma_n = G_n$. Munies de la norme et de l'extension, les collections suivantes constituent les systèmes normiques que l'on souhaite étudier :

- $E_n := \mathcal{O}_{F_n}^\times \otimes \mathbb{Z}_p$ le $\mathbb{Z}_p$-module des unités, $E = (E_n) \in \underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$.
- $\mathcal{C}l_n := \mathcal{C}l(\mathcal{O}_{F_n}) \otimes \mathbb{Z}_p$ le p-groupe de classes, $\mathcal{C}l = (\mathcal{C}l_n) \in \underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$.
- $C_n \subset E_n$ le $\mathbb{Z}_p$-module engendré par les unités cyclotomiques (cf [Sin80] pour une définition précise), $C = (C_n) \in \underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$.
- $B_n := E_n/C_n$, $B = (B_n) \in \underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}_{tf}$.

On utilisera aussi les systèmes normiques auxiliaires suivants :

- $E' = (E'_n)$, $\mathcal{C}l' = (\mathcal{C}l'_n)$, $Br' = (Br'_n)$, $R\Gamma_S = R\underline{\Gamma}(G_S, \mathbb{Z}_p(1))$, $H^1_S = (H^1(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq E'$, $H^2_S = (H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)))$, $\underline{\Lambda}_v = (\mathbb{Z}_p[G_n/G_{n,v}])$ (voir section 6.2 pour les notations).
- $I = (I_n)$ où I_n est le $\mathbb{Z}_p$-module libre sur les p-places de F_n, et les application de transitions sont induites par l'extension et la norme des idéaux.

Si A est un système normique, on note

$$A_\infty = \varinjlim A_n,\ X_\infty = \varprojlim A_n,\ j_n : A_n \to (A_\infty)^{\Gamma_n},\ \text{et}\ k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \to A_n$$

Si plusieurs systèmes normiques sont en jeu, on écrira parfois $A_\infty(A)$, $X_\infty(A)$, $j_{n,A}$ ou encore $k_{n,A}$ pour indiquer auquel on se rapporte.

Proposition 6.19 *Si $A = E, \mathcal{C}l, C$ ou B, alors :*
1. X_∞ est un Λ-module de type fini.

2. (i) Les systèmes inductifs $H_1(\Gamma_n, X_\infty)$, $Ker\, k_n$ et $Coker\, k_n$ se stabilisent ; en particulier, leur limite est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$.

(ii) Les systèmes projectifs $Ker\, j_n$, $Coker\, j_n$, $H^1(\Gamma_n, A_\infty)$ et $H^2(\Gamma_n, A_\infty)$ se stabilisent ; en particulier leur limite est de torsion sur $\mathbb{Z}_p$.
3. Les Λ-modules $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ et $Ext^1_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p} A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont de type fini.

Preuve : Commençons par un lemme :

Lemme 6.20 *A lieu dans $\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}$ une suite exacte "de localisation hors des p-places" qui se matérialise par une famille de suites exactes :*

$$E_n \hookrightarrow H^1(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \to I_n \to \mathcal{C}l_n \to H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \to \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p[G_n/G_{n,v}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$$

Preuve : La construction directe (par localisation) d'un triangle distingué adéquat ne semblant pas relever des méthodes de cet article, on se contentera d'une construction à la main. D'abord, la théorie de Kummer donne comme en 6.10 (ii) $E'_n \simeq H^1(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1))$ et $\mathcal{C}l'_n \hookrightarrow H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \to Br'_n$. La suite exacte de l'énoncé est alors obtenue en recollant cette dernière à la suite exacte de valuation : $E_n \hookrightarrow E'_n \to \mathbb{Z}_p[S(F_n)] \to \mathcal{C}l_n$, via la flèche naturelle $\mathcal{C}l_n \to \mathcal{C}l'_n$. La famille de suites exactes ainsi construite est G_n-équivariante, compatible à la norme et à l'extension, et donne donc bien une suite exacte dans $\underline{{}_\Gamma\mathcal{C}}$.

□

Preuve de 6.19 : 1. Dans la suite exacte obtenue en appliquant $\varprojlim_n$ à celle du lemme précédent, on connaît déjà la noethérianité du second et du cinquième terme grâce à 6.13 1., et celle des troisième et sixième terme est évidente, compte-tenu de leur description explicite. Le résultat suit.

2. (i) D'après (6.11 (ii)), $C(k_{R\Gamma_S}) = 0$. Par 5.17 2., on en déduit que $C(k_{H^q_S})$ se stabilise pour $q = 1, 2$. Par ailleurs, les systèmes normiques I et $\underline{\Lambda}_v$ se stabilisent via la corestriction, puisque pour n suffisamment grand, l'extension F_∞/F_n est totalement ramifiée en chaque p-place. Il s'ensuit que $C(k_I)$ et $C(k_{\underline{\Lambda}_v})$ se stabilisent automatiquement (5.15), puis $C(k_E)$ et $C(k_{\mathcal{C}l})$ aussi, par 5.20, appliqué à la suite exacte 6.20.

Reste la stabilisation de $C(k_C)$ et $C(k_B)$. Par définition de B, il y a une suite exacte $C \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$, et il nous suffit donc par 5.21 d'établir la stabilisation de $Coker\, k_n$ pour $A = C$ (condition (i), *loc. cit.*). Or celle-ci est assurée par la

Proposition 6.21 *([Bel02], lemme 2.5) Coker k_n se stabilise dès que toutes les p-places sont totalement ramifiées dans F_∞/F_n. En particulier, Coker k_n se stabilise.*

La preuve de ce résultat repose sur un examen attentif de la définition des unités cyclotomiques.

□

Terminons la preuve de 6.19 : 2. (ii) procède de 5.14 (i), et 3. découle de 1. et 2. (i), compte-tenu de 4.9.

□

Pour aller plus loin, nous devons prendre en compte la spécificité des quatre systèmes normiques qui nous occupent. Rassemblons en un lemme les propriétés qui nous seront utiles :

Lemme 6.22
(i) Pour $A = E$: $t_{\mathbb{Z}_p}A_n = \mu_{p^\infty}(F_n)$, $Ker\, j_n = 0$ et $Coker\, j_n = 0$.
(ii) Pour $A = C$: $t_{\mathbb{Z}_p}A_n = \mu_{p^\infty}(F_n)$, $Ker\, j_n = 0$ et $Coker\, j_n$ est fini.
(iii) Pour $A = \mathcal{C}l$: A_n est fini et $Coker\, k_n = 0$ pour $n >> 0$.
(iv) Pour $A = B$: B_n est fini.

Preuve : (i) est clair.

(ii) La trivialité de $Ker\, j_n$ se déduit de la propriété analogue pour E. Quant à $Coker j_n$, c'est d'une part un sous-quotient de E_n donc un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, et d'autre part un $\mathbb{Z}_p$-module de torsion, comme chaque objet de cohomologie de $C(j_A)$. Il est donc nécessairement fini.

(iii) Comme k_n est un isomorphisme pour $A = (H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)))$ et $A = (Br'_n)$, appliquer le foncteur homologique $H^\bullet(C(k_{(-)}))$ aux deux suites exactes suivantes (découpées dans 6.20) : $I \to \mathcal{C}l \to \mathcal{C}l' \to 0$, et $0 \to \mathcal{C}l' \to H^2_S \to Br'_n \to 0$ en donne une troisième : $Coker\, k_{n,I} \to Coker\, k_{n,\mathcal{C}l} \to Ker\, k_{n,Br'}$, dans laquelle les deux termes extrêmes s'annulent dès que F_∞/F_n est totalement ramifiée en chaque p-place. On a donc bien $Coker\, k_n = 0$ pour $A = \mathcal{C}l$ et $n >> 0$.

(iv) La finitude de B_n est bien connue ([Sin80] th. 4. 1 donne même une formule pour l'ordre de B_n).

□

Remarque 6.23 *(i) (Leopoldt) Pour $A = B$, $Ker\, k_n$ est fini $\forall n$. En effet, la finitude de $Ker\, k_n$ (ie. de $(\varprojlim B_m)_{\Gamma_n}$) résulte de la conjecture de Leopoldt sous sa forme "fonctions L p-adiques", modulo la généralisation par [Tsu99] aux corps abéliens quelconques du théorème d'Iwasawa reliant unités cyclotomiques et fonctions L p-adiques. On renvoie à [Bel] th. 1.1 pour plus d'explications.*

(ii) Considérons la condition suivante :

$$(S_p = S_p^+) : F_\infty \text{ et } F_\infty^+ \text{ possèdent le même nombre de } p\text{-places}$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, cette condition assure la finitude de $Ker\, k_n$ $\forall n$. En effet, pour la partie $-$, cela résulte de la conjecture de Gross (cf [Kol91]), et de celle de Leopoldt pour la partie $+$ (cf [Gre76], th. 1).

En fait, $(S_p = S_p^+) \Leftrightarrow Ker\, k_n$ est fini $\forall n$, comme nous le verrons plus loin (6.33) 2.

Reste maintenant à écrire les résultats de la proposition 5.23 pour les quatre systèmes normiques qui nous occupent. On procède en trois étapes :
- 6.25 énoncé des résultats pour $A = \mathcal{C}l$ ou B.
- 6.28 énoncé des résultats pour $A = E$ ou C.
- 6.31 lien entre les deux premières étapes.

à chaque étape, on indique une liste de corollaires (connus ou non), dont les notations suivantes simplifieront les énoncés.

Définition 6.24 *1. Si M est un Λ-module de type fini, on note :*
(i) $M^\delta = \cup M^{\Gamma_n} \simeq \varinjlim H_1(\Gamma_n, M)$.
(ii) $M^0 = t_{\mathbb{Z}_p} M^\delta$ son sous-module fini maximal.
2. (ii) Dualement, si M est un Λ-module topologique discret ($\Rightarrow$ de $\mathbb{Z}_p$-torsion) tel que $Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ soit un Λ-module de type fini, on note :
(i) $M_\delta = Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim M_{\Gamma_n} \simeq \varprojlim H^1(\Gamma_n, M)$.
(ii) $M_0 = Hom_{\mathbb{Z}_p}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^0, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim_{n,k} M_{\Gamma_n}/p^k$.

Proposition 6.25 *Soit $A = \mathcal{C}l$ ou B, alors :*
1. Les Λ-modules X_∞ et $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion.
2. Il y a deux flèches adjointes naturelles :

$$\alpha_j : X_\infty \to E^1(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \quad \alpha_k : Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to E^1(X_\infty)$$

et celles-ci vérifient :

(i) Non canoniquement, $Ker\,\alpha_j$, $Coker\,\alpha_j$, $Ker\,\alpha_k$, $Coker\,\alpha_k$ sont tous pseudo-isomorphes.

(ii) Noyau et conoyau de α_j sont décrits par :

$$\varprojlim Ker\, j_n \hookrightarrow Ker\,\alpha_j \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} Coker\, j_n[p^k]$$

$$Ker\alpha_j \simeq \varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty)$$

$$\varprojlim_{n,k} Coker\, j_n/p^k \hookrightarrow Coker\,\alpha_j \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)[p^k]$$

$$Coker\,\alpha_j \simeq \varinjlim Ker k_n$$

De plus, on a

$$E^2(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \simeq \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)/p^k \simeq \varinjlim Coker\, k_n$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, ce dernier module vaut 0.

(iii) Noyau et conoyau de α_k sont décrits par :

$$Ker\alpha_k \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Coker\, k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow Ker\alpha_k \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Ker\, k_n, \mathbb{Z}_p)$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, le premier terme de la suite exacte précédente est trivial.

Pour $A = \mathcal{C}l$ ou B, on a de plus

$$Coker\,\alpha_k \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim Coker\, j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim Ker\, k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow Coker\,\alpha_k \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \mathbb{Z}_p)$$

$$E^2(X_\infty) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim Ker\, j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

Preuve : Le corollaire 5.24 donne 1. et 2. (i). Le point 2. (ii) (resp. 2. (iii)) est donné par 5.23 2. (i) et 3. (ii) (resp. 5.23 2. (ii) et 3. (iii)).

□

Remarque 6.26 *Dans la proposition précédente,*

(i) *Si* $Ker\,\alpha_j$ *est fini, alors le troisième terme de chacune des quatre suites exactes de 6.25 disparaît, puisque le terme central doit être fini (6.25 2.* (i)*). De plus, les suites exactes en question mettent en évidence l'équivalence entre la finitude des modules suivants :* $Ker\,\alpha_j$, $\varprojlim Coker\, j_n$, $\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty)$, $\varinjlim Ker\, k_n$, $\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty)$*. Comme les systèmes projectifs et inductifs en jeu se stabilisent, on voit facilement que la finitude de la limite équivaut à celle de tous les arguments ; par exemple,* $\varinjlim Ker\, k_n$ *est fini si et seulement si chacun des* $Ker\, k_n$ *l'est. On renvoie à 6.23 pour l'interprétation arithmétique de cette condition.*

(ii) *Pour* $A = B$*, la conjecture de Leopoldt assure la finitude de* $Ker\,\alpha_j$ *(cf.* (i) *et 6.23* (i)*). Dans cette situation l'expert appréciera de voir la finitude des groupes de cohomologie* $H^q(\Gamma_n, \varinjlim B_m)$ *apparaître sans plus d'efforts. Dans ce contexte, on note que 6.25 2.* (iii) *donne deux isomorphismes :*

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim Coker\, j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Ker\, k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Coker\,\alpha_k$$

dont le premier répond au attentes de [LNQD00] Cor. 4. 6, en toute généralité.

(iii) *Pour* $A = \mathcal{C}l$*, les résultats sont indépendants de toute hypothèse sur* F*. Par ailleurs, il tiennent verbatim si l'on remplace* $\mathcal{C}l$ *par* $\mathcal{C}l'$*. Dans ce contexte, le rapport entre* $Coker\,\alpha_k$, $\varprojlim Coker\, j_n$ *et* $\varinjlim Ker\, k_n$ *est à rapprocher de l'interprétation de [LFMNQD05] de ces deux derniers objets en termes du module de Bertrandias-Payan (cf loc. cit).*

Corollaire 6.27 *Avec les notations de la définition précédente, on a :*

1. (i) $(\varprojlim \mathcal{C}l_n)^0 \simeq \varprojlim Ker\, j_{n,\mathcal{C}l}$.

(ii) $(\varinjlim \mathcal{C}l_n)_0 \simeq \varinjlim Coker\, k_{n,\mathcal{C}l} = 0$.

2. (i) $(\varprojlim B_n)^0 \simeq \varprojlim Ker\, j_{n,B}$.

(ii) $(\varinjlim B_n)_0 \simeq \varinjlim Coker\, k_{n,B}$.

Preuve : D'après 6.25, 2. (ii), on a $Ker\alpha_j = (X_\infty)^\delta$. Les points 1. (i) et 2. (i) découlent aussitôt de 6.25 2. (ii). De manière analogue, les points 1. (ii) et 2. (ii) s'obtiennent en dualisant l'isomorphisme $Ker\alpha_k = Hom_{\mathbb{Z}_p}((A_\infty)_\delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, à l'aide de 6.25 2. (iii).

□

Proposition 6.28 *Soit* $A = E$ *ou* C, $X_\infty = \varprojlim A_n$, $A_\infty = \varinjlim A_n$. *Alors :*
1. Les Λ*-modules* X_∞ *et* $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ *sont noethériens.*
2. Il y a deux flèches duales naturelles :

$$\tilde{\alpha}_j : X_\infty \to E^0(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)) \quad \alpha_k : Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) \to E^0(X_\infty)$$

et celles-ci vérifient :

(i) *Noyau et conoyau de* $\tilde{\alpha}_j$ *sont décrits par :*

$$Ker\,\tilde{\alpha}_j = \varprojlim \mu_{p^\infty}(F_n) \qquad Coker\,\tilde{\alpha}_j \simeq \varinjlim Ker\,k_n$$

$$\varprojlim Coker\,j_n \hookrightarrow Coker\,\tilde{\alpha}_j \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)[p^k]$$

Dans la suite exacte précédente, le premier terme est fini si $A = C$, *trivial si* $A = E$.

De plus, $E^1(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)) \simeq \varinjlim Coker\,k_n$ *et il y a une suite exacte*

$$\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)/p^k \hookrightarrow E^1(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)) \twoheadrightarrow \varprojlim H^2(\Gamma_n, A_\infty)[p^k]$$

(ii) *Noyau et conoyau de* α_k *sont décrits par :*

$$Ker\,\alpha_k \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim H^2(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Coker\,k_n, \mathbb{Z}_p)$$

$$Coker\,\alpha_k \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim Coker\,k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow Coker\,\alpha_k \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Ker\,k_n, \mathbb{Z}_p)$$

De plus, il y a une suite exacte

$$\varprojlim \mu_{p^\infty}(F_n) \hookrightarrow E^1(X_\infty) \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim Ker\,k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

et $Hom_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim Ker\,k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim Coker\,j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ *; ce dernier module est trivial si* $A = E$.

Preuve : 1. vient de 5.23 1. et 3. Si $\mu_p(F) = 0$, alors 2. (i) (resp. 2. (ii)) est donné par 5.23 2. (i) et 3. (ii) (resp. 5.23 2. (ii) et 3. (iii)). Pour traiter le cas $\mu_p(F) \neq 0$, on introduit le système normique des racines de l'unité : $\underline{\mathbb{Z}}_p(1) = (\mu_{p^\infty}(F_n))$. Comme $\mu_{p^\infty}(F_\infty)$ est Γ-cohomologiquement trivial, on voit que $C(j_{\underline{\mathbb{Z}}_p(1)})$ et $C(k_{\underline{\mathbb{Z}}_p(1)})$ sont triviaux, si bien qu'il n'y a aucune difficulté à se ramener à l'étude du système normique $A/\underline{\mathbb{Z}}_p(1)$; laquelle est analogue au cas $\mu_p(F) = 0$.

$\square$

Si $M \hookrightarrow \Lambda^r$, il est bien connu (et facile à démontrer) que M est libre si et seulement si le conoyau est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion. De plus, la $\mathbb{Z}_p$-torsion du conoyau en question ne dépend pas du plongement choisi, à unique isomorphisme près ; on définit donc ainsi un invariant structurel de M, appelé suggestivement le défaut de liberté du Λ-module M.

Corollaire 6.29
1. (i) On a $t_\Lambda \varprojlim E_n = \mathbb{Z}_p(1)$ *ou* 0 *selon que* F *contient ou non* μ_p *;*

$$t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E_n, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(\varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Coker\, k_{n,E}, \mathbb{Z}_p)$$

(ii) $f_\Lambda \varprojlim E_n$ *est libre, et le défaut de liberté de* $f_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E_n, \mathbb{Z}_p)$ *est dual à* $\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)/p^k \simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim Coker\, k_{n,E}$.
2. (i) On a $t_\Lambda \varprojlim C_n = \mathbb{Z}_p(1)$ *ou* 0 *selon que* F *contient ou non* μ_p *;*

$$t_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C_n, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(\varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m C_m), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim Coker\, k_{n,C}, \mathbb{Z}_p)$$

(ii) Le défaut de liberté du module $f_\Lambda \varprojlim C_n$ *est isomorphe à* $\varprojlim Coker\, j_{n,C}$ $\simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim Ker\, k_{n,C}$*, et celui de* $f_\Lambda Hom_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C_n, \mathbb{Z}_p)$*, dual à* $\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m C_m)/p^k$ $\simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim Coker\, k_{n,C}$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition qui précéde, compte-tenu du fait que le but de $\tilde{\alpha}_j$, comme celui de α_k, est un Λ-module libre, puisqu'obtenu en appliquant E^0 à un Λ-module de type fini.

$\square$

Remarque 6.30 *1. (i) apparaît en filigrane dans [Iwa83].*
1. (ii) est généralement attribué à [Kuz72]. Voir aussi [Gre94], pour une preuve algébrique de la première partie, dans le contexte de l'étude axiomatique de systèmes normiques particuliers.
2. (iii) La première partie de l'énoncé est dûe à [Bel02]. Le module $\varprojlim Coker j_{n,C}$ *a fait l'objet de nombreuses études, cf [BNQD05] pour quelques références.*

Proposition 6.31

(i) Il y a un diagramme commutatif naturel, dans lequel la colonne centrale est exacte :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varinjlim Ker\, k_{n,E} & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varprojlim I_n & & \\
 & & r\downarrow & & \\
\varprojlim Ker\, j_{n,\mathcal{C}l} & \hookrightarrow & Ker\, \alpha_{j,\mathcal{C}l} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} Coker\, j_{n,\mathcal{C}l}[p^k] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)/p^k & \hookrightarrow & \varinjlim Coker\, k_{n,E} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varprojlim Br'_n & & \\
 & & \downarrow & & \\
\varprojlim_{n,k} Coker\, j_{n,\mathcal{C}l}/p^k & \hookrightarrow & \varinjlim Ker\, k_{n,\mathcal{C}l} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim \mathcal{C}l_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Dans ce diagramme, $r : \varprojlim I_n \to Ker\, \alpha_{j,\mathcal{C}l} = (\varprojlim \mathcal{C}l_m)^\delta$ *est induite par la flèche naturelle* $I_n \to \mathcal{C}l_n$*.*

(ii) Il y a une suite exacte naturelle

$$
\varprojlim Ker\, j_{n,\mathcal{C}l} \hookrightarrow \varprojlim_n H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m) \to (\varprojlim I_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \varprojlim Coker\, j_{n,\mathcal{C}l}
$$

$$
\to \varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m) \to (\varprojlim Br'_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \varprojlim H^1(\Gamma_n, \varinjlim \mathcal{C}l_m)
$$

Preuve : Le moyen le plus rapide serait l'utilisation du triangle distingué sous-jacent à la suite exacte de localisation 6.20. Comme il n'est pas disponible directement, on en fabrique un à la main :

Lemme 6.32 *On peut trouver* $Z, Z' \in D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$, *et un triangle distingué de* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})_{tf}$ *:* $T = (Z \to R\Gamma_S \to Z' \to Z[1])$ *vérifiant le propriétés suivantes :*

(i) Z *et* Z' *sont acycliques en degrés* $\neq 1, 2$, *et la suite exacte longue de cohomologie de* T *s'identifie à 6.20, tronquée à l'avant-dernier terme :*

$$\begin{array}{ccccccccccc} H^1(Z) & \hookrightarrow & H^1(R\Gamma_S) & \to & H^1(Z') & \to & H^2(Z) & \to & H^2(R\Gamma_S) & \twoheadrightarrow & H^2(Z') \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ E & \hookrightarrow & H^1_S & \to & I & \to & \mathcal{C}l & \to & H^2_S & \twoheadrightarrow & Br' \end{array}$$

(ii) $\Delta_j(Z') \simeq X_\infty(Z')[1]$.
(iii) $\Delta_j(Z) \simeq \Delta_j(Z')[-1]$.

Preuve : (i) L'existence de Z, Z' et T vérifiant (i) relève du lemme 5.19. Les propriétés (ii) et (iii) se déduisent de (i). En effet :

(ii) Puisque $\tau_{\leq 1} Z' = I$ et $\tau_{\geq 2} Z' = Br'$ se stabilisent via la corestriction, on voit tout de suite que la cohomologie de $A_\infty(Z')$ est uniquement p-divisible. D'où, automatiquement, la trivialité de $X^*_\infty(Z') \simeq RHom_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty(Z'), \mathbb{Z}_p)$, si bien que le triangle distingué $\alpha_j(Z')$ se réduit à l'isomorphisme de l'énoncé.

(iii) est obtenu en appliquant Δ_j à T, puisque $\Delta_j(R\Gamma_S) = 0$ (6.11 (iii)).

□

Retour à la preuve de 6.31 : Tronquer Z et appliquer le foncteur Δ_j donne un triangle distingué

$$\Delta_j(E[-1]) \to \Delta_j(Z) \to \Delta_j(\mathcal{C}l[-2]) \to \Delta_j(E)$$

dans lequel le premier (resp. troisième) sommet est *a priori* (4.11) acyclique hors de $[0, 2]$ (resp. $[1, 3]$), et le second, hors de $[1, 2]$ (6.32 (ii)). D'où une suite exacte longue de cohomologie

$$H^0(\Delta_j(E)) \hookrightarrow H^1(\Delta_j(Z)) \to H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}l)) \to H^1(\Delta_j(E))$$

$$\to H^2(\Delta_j(Z)) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_j(\mathcal{C}l))$$

dont il reste à vérifier qu'elle donne bien la colonne du diagramme de l'énoncé. La description explicite des second et cinquième termes relève de 6.32. Pour les autres, et pour les suites exactes horizontales, on applique 6.25 2. (ii) et 6.28 2. (i), compte-tenu de la description suivante de la cohomologie de $\Delta_j(A)$, valable aussi bien pour $A = E$ que pour $A = \mathcal{C}l$ (5.22 2. (ii)) :

- $H^{-1}(\Delta_j(A)) \simeq Ker\alpha_j$ et $H^0(\Delta_j(A)) \simeq Coker\alpha_j \simeq \varinjlim Ker\, k_n$.

- $H^1(\Delta_k) \simeq \varinjlim Coker\, k_n$.

Vérifier que la flèche r est bien induite par $I_n \to \mathcal{C}l_n$ ne pose pas de diffculté particulière, si l'on observe l'effet du morphisme fonctoriel $\Delta_j[-1] \to X_\infty$ (début du triangle α_j) sur la flèche composée suivante (cf. 6.32) :

$$I \simeq (\tau_{\leq 1} Z')[1] \to Z'[1] \to Z[2] \to (\tau_{\geq 2} Z)[2] \simeq \mathcal{C}l$$

(ii) La suite exacte de l'énoncé est obtenue en appliquant le foncteur $\varinjlim C(j_{(-)})$ au triangle T de 6.32, compte-tenu de 5.22 2. (iii), et du fait que $C(k_A) = (H_1(\Gamma_n, X_\infty))[2] \simeq (X_\infty^{\Gamma_n})[2]$, pour $A = I$ ou Br'.

□

Remarque 6.33 *Une suite exacte à sept termes, similaire à celle de 6.31 2. apparaît dans la littérature en plusieurs endroits (e.g. [Iwa83] et ref.). Cette suite exacte présente plusieurs intérêts :*

1. Comme on sait que les limites en question se stabilisent, on obtient une information sur la structure des groupes $H^q(\Gamma_n, \varinjlim E_m)$, $q = 1, 2$ pour $n >> 0$. C'est l'objet de [Iwa83].

2. On voit se produire le pendant algébrique du phénomène des zéros triviaux : comme $H^q(\Gamma_n, \varinjlim E_m)$ est fixé par la conjugaison complexe, on obtient dans la partie imaginaire : $(\varprojlim I_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^- \simeq \varprojlim (Coker\, j_{n,\mathcal{C}l})^-$. La conjecture de Leopoldt prédisant par ailleurs la finitude de $(Coker\, j_{n,\mathcal{C}l})^+$ (cf 6.23), on voit que $rg_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim \mathcal{C}l_m)^\delta = corg_{\mathbb{Z}_p}\varprojlim (Coker\, j_{n,\mathcal{C}l})$ (cf 6.25 1. (ii)) coïncide avec le nombre de p-places qui se décomposent dans F_∞/F_∞^+.

Corollaire 6.34 (i) $t_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim Coker\, k_{n,E} \simeq (\varprojlim \mathcal{C}l'_n)^0$.

Preuve : Cela découle de la description explicite de la flèche r dans 6.31 (i).

□

Corollaire 6.35 *(utilise la conjecture de Leopoldt, cf 6.23 (ii))*

Il y a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, C_\infty)[p^k] & \hookrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, E_\infty)[p^k] & \to & \varprojlim Cok\, j_{n,B} \\
 & & \uparrow & & \wr\uparrow & & \wr\downarrow \\
(\varprojlim B_m)^0 & \hookrightarrow & \varinjlim Ker\, k_{n,C} & \to & \varinjlim Ker\, k_{n,E} & \to & \varinjlim Ker\, k_{n,B}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\to & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, C_\infty))_0 & \to & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, E_\infty))_0 & \to & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, \varinjlim B_m))_0 \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\to & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim Coker\, k_{n,C} & \to & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim Coker\, k_{n,E} & \to & \varinjlim Coker\, k_n
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\to & \varprojlim H^2(\Gamma_n, C_\infty) & \twoheadrightarrow & \varprojlim H^2(\Gamma_n, E_\infty) \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\to & \varinjlim Cok\, k_{n,C} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \twoheadrightarrow & \varinjlim Cok\, k_{n,E} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p
\end{array}$$

Le première flèche verticale est surjective, et son noyau vaut $\varprojlim Coker\, j_{n,C}$.

Preuve : On applique 5.25 2. au triangle distingué tautologique $C \to E \to B \to C[1]$, avec $q = 1$. L'hypothèse de 2. (i) est satisfaite grâce à Leopoldt : en effet $\varprojlim H^1(C_{j_B}) = \varprojlim Coker\, j_n$ se stabilise et $(B_\infty)^{\Gamma_n}$ est fini, par 6.26.

Dans l'énoncé, on a remplacé $H^0(\Delta_j(C)) = Coker\, \alpha_j = Coker\, \tilde{\alpha}_j$ par son quotient sans torsion (cf 6.28 2. (i)), c'est pourquoi la première flèche verticale n'est pas injective a priori.

□

Remarque 6.36 *Ce résultat recouvre à la fois les th. 3.7 (descente) et 4.5 (codescente) de [NQDL06], et montre que l'hypothèse concernant la nullité de* $\varprojlim Coker\, j_{n,C}$ *((DG) dans la terminologie de* loc. cit.*) ne joue aucun rôle dans cette étude.*

7 Appendice : Construction explicite du complexe dualisant

Dans le cas d'un groupe Γ de dimension cohomologique finie pour lequel $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ est noethérien, on construit le complexe dualisant pour la cohomologie galoisienne de la catégorie ${}_\Gamma\mathcal{C}_{tor}$ des Γ-modules discrets de p-torsion. La construction, basée sur les propriétés des foncteurs d'induction (cf 2.1) d'une part, et le rapport entre cohomologie galoisienne et foncteurs Ext d'autre part, présente les avantages suivants :

- On obtient une formule explicite pour le complexe dualisant, et pas seulement pour sa cohomologie.

- Au lieu d'une collection d'isomorphismes fonctoriels dans $D^b(Ab)$, exprimant que les foncteurs $Hom_{\mathbb{Z}_p}(H^q(\Gamma_n,-),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) : {}_\Gamma\mathcal{C}_{tor} \to Ab$ sont tous représentables par le même objet de $D(\Gamma) \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, on établit un isomorphisme fonctoriel dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ (ce qui est plus précis), exprimant la "représentabilité" du foncteur $Hom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(-),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (cf. 7.3 et 7.4 pour l'énoncé exact). Cette précision est essentielle en vue des passages à la limites.

Comme toujours, on regarde ${}_\Gamma\mathcal{C}$ comme une sous-catégorie pleine de ${}_\Lambda\mathcal{C}$. Lorsqu'on écrit $RHom_\Lambda$ ou $R\underline{Hom}$, il s'agit toujours des foncteurs obtenus par dérivation à droite sur ${}_\Lambda\mathcal{C}$ (et non sur ${}_\Gamma\mathcal{C}$).

Lemme 7.1

(i) Soit B un objet injectif de ${}_\Gamma\mathcal{C}$. Si B est de $\mathbb{Z}_p$-torsion, alors le foncteur $Hom_\Lambda(-,B) : {}_\Lambda\mathcal{C}_{tf} \to {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ est exact.

(ii) Soit $B \in Kom^+({}_\Lambda\mathcal{C})$ un complexe dont les objets vérifient (i), alors les flèches canoniques de $D^+({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})$ (resp. $D^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ ou $D^+(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$) :

$$Hom_\Lambda(A,B) \to RHom_\Lambda(A,B) \qquad (\textit{resp. } \underline{Hom}(A,B) \to R\underline{Hom}(A,B)\ )$$

sont des isomorphismes pour tout $A \in Kom^-({}_\Lambda\mathcal{C})_{tf}$.

Preuve : (i) La sous-catégorie de ${}_\Gamma\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathbb{Z}_p$-torsion s'identifie à celle des Λ-modules topologiques discrets, et ${}_\Lambda\mathcal{C}_{tf}$ à une sous-catégorie pleine des Λ-modules topologiques compacts. Le résultat provient alors de [Bru66] lemma 2.2.

(ii) découle facilement de (i).

$\square$

On utilise maintenant les foncteurs d'induction (normique et discrète) définis dans les préliminaires (cf. 2.1).

Lemme 7.2

Pour $(A, B, C) \in {}_\Gamma\mathcal{C} \times {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C} \times {}_\Lambda\mathcal{C}$*, il y a dans* ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ *un morphisme trifonctoriel*

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, B)\underline{\otimes}C \longrightarrow \underline{Hom}(A, Coind_\Gamma(B) \otimes_\Lambda C)$$

c'est un isomorphisme si C *est projectif de type fini.*

Preuve : On a une série d'isomorphismes, expliqués ci-dessous :

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, B)\underline{\otimes}C &\overset{(1)}{\simeq} \underline{Ind}(Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, B)) \otimes_\Lambda C \\ &\overset{(2)}{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{Coind}(A), B) \otimes_\Lambda C \\ &\overset{(3)}{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{Ind}(A), B) \otimes_\Lambda C \\ &\overset{(4)}{\simeq} Hom_\Lambda(\underline{Ind}(A), Coind_\Gamma(B)) \otimes_\Lambda C \end{aligned}$$

(1) est simplement l'isomorphisme d'induction, pour $\underline{Ind} : \mathcal{C}_\Lambda \to {}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$ (noter que $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, B)$ est un Λ-module à droite, via A).

(2) provient de l'isomorphisme d'évaluation suivant, dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$:

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, B)\underline{\otimes}\Lambda \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(\underline{Hom}(\Lambda, A), B)$$

(3) résulte de 2.3, qui identifie les foncteurs $\underline{Ind}$ et $\underline{Coind} : {}_\Lambda\mathcal{C} \to {}_\Lambda\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$.

(4) Par hypothèse, Γ agit discrètement sur A. Comme Γ_n est distingué, on voit tout de suite que l'action à gauche de $\Gamma \subset \Lambda$ sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A$ via le facteur Λ est discrète aussi. Munissant B d'une action triviale de Γ, on obtient alors un isomorphisme d'induction discrète :

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A, B) \simeq Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A, Coind_\Gamma B)$$

Celui-ci a lieu dans ${}_{G_n}\mathcal{C}_\Lambda$, si l'on fait agir G_n à gauche via la conjugaison à droite sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A$, et Λ à droite via le facteur Λ (resp, $Coind_\Gamma B$) sur le premier (resp. second) terme (dans le contexte du paragraphe intitulé "induction discrète" dans les préliminaires, cette action de Λ doit être interprétée comme une action de Γ par conjugaison). D'où un isomorphisme dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}_\Lambda$, en faisant varier n ; (4) suit.

Par ailleurs, il y a dans ${}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C}$ un isomorphisme d'induction, avec cette fois $\underline{Ind} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \to {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}}$:

$$\underline{Hom}(A, Coind_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C) \simeq Hom_{\Lambda}(\underline{Ind}(A), Coind_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C)$$

La flèche de l'énoncé provient alors finalement de la flèche naturelle de multiplication :

$$Hom_{\Lambda}(\underline{Ind}(A), Coind_{\Gamma}(B)) \otimes_{\Lambda} C \to Hom_{\Lambda}(\underline{Ind}(A), Coind_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C)$$

C'est visiblement un isomorphisme lorsque A est projectif de type fini.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de dualité.

Théorème 7.3 (Complexe dualisant)
Soit $D(\Gamma) := \varinjlim \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p \in D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$.
Si $A \in D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$*, il y a dans* $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ *un isomorphisme fonctoriel :*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \underline{\overset{L}{\otimes}} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} R\underline{Hom}(A, D(\Gamma))$$

Preuve de 7.3 : Soit $P \to \mathbb{Z}_p$ une résolution parfaite de $\mathbb{Z}_p$ dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$. D'après 7.2, on a dans $Kom^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ un isomorphisme fonctoriel, pour $A \in Kom^-({}_{\Gamma}\mathcal{C})$ (avec les conventions de signes adéquates pour la formation des complexes totaux...) :

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \underline{\otimes} P \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}(A, Coind_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P)$$

Fixant un quasi-isomorphisme $Coind_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P \to I$ où $I \in Kom^+({}_{\Lambda}\mathcal{C})$ est à objets injectifs, on obtient alors un morphisme composé, fonctoriel dans $Kom^+({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$:

$$Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \underline{\otimes} P \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}(A, Coind_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P) \xrightarrow{?} \underline{Hom}(A, I) \quad (1)$$

Comme $Coind_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P = \varinjlim \underline{Coind}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P \simeq \varinjlim \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \underline{\otimes} P$ représente $D(\Gamma)$, et que I en est une résolution injective dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, on voit que le but de (1) ci-dessus représente $R\underline{Hom}(A, D(\Gamma))$. Reste donc à montrer que la flèche marquée "?" est un quasi-isomorphisme.

Puisque $Coind_\Gamma(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est un injectif de ${}_\Gamma\mathcal{C}$, de $\mathbb{Z}_p$-torsion, c'est que les objets de $B := Coind_\Gamma(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_\Lambda P$ vérifient les conditions de 7.1 (i). Si de plus on suppose A de type fini, 7.1 (ii) affirme que "?" est un quasi-isomorphisme et cela termine la preuve dans ce cas. Le cas général se ramène au cas où A est de type fini, par un argument de passage à la limite. Détaillons. Soit $(A_i) \in Kom^b({}_\Gamma\mathcal{C}_{tf}{}^I) = Kom^b({}_\Gamma\mathcal{C}_{tf})^I$ un système inductif de complexes de type fini tel que $A = \varinjlim A_i$, et $Cofl^*((A_i)) \to (A_i)$ la résolution coflasque envisagée dans la preuve de 2.9 4. ($Cofl^*((A_i)) \in Kom^-({}_\Gamma\mathcal{C}^I)$). Par fonctorialité la flèche (1) donne un diagramme commutatif de $Kom^+(\underline{{}_\Gamma}\mathcal{C}^{I^\circ})$:

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathbb{Z}_p}((A_i), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P & \xrightarrow{1} & \underline{Hom}((A_i), I) \\
{\scriptstyle 2}\downarrow & & {\scriptstyle 3}\downarrow \\
Hom_{\mathbb{Z}_p}(Cofl^*((A_i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P & \longrightarrow & \underline{Hom}(Cofl^*((A_i)), I) \\
{\scriptstyle 4}\downarrow & & {\scriptstyle 5}\downarrow \\
Fl^*((Hom_{\mathbb{Z}_p}(A_i), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P) & \xrightarrow{6} & Fl^*(\underline{Hom}(A_i, I))
\end{array}$$

Dans celui-ci :

- La flèche 1 est un qis d'après ce qu'on a déjà démontré, puisque les A_i sont de type fini.

- Les flèches 2 et 3 sont des qis, puisque les foncteurs $Hom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P$ et $\underline{Hom}(-, I)$ sont exacts.

- Les flèches 4 et 5 sont des isomorphismes, puisque les deux foncteurs précédents transforment sommes en produits.

En conséquence, la flèche 6 est elle aussi un qis. Ne reste plus qu'à appliquer le foncteur $\varprojlim_I$: on obtient alors un diagramme semblable dans lequel :

- les flèches 2, 3 sont des qis, car les foncteurs $\varprojlim \circ Hom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P \simeq Hom_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P \circ \varinjlim$ et $\varprojlim \circ \underline{Hom}(-, I) \simeq \underline{Hom}(-, I) \circ \varinjlim$ sont exacts.

- Les flèches 4 et 5 sont toujours des isomorphismes.

- La flèche 6 est un qis, car les objets des deux complexes inférieurs sont acycliques pour $\varprojlim$.

En conséquence, la flèche $Hom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\otimes}P \to \underline{Hom}(A, I)$, déduite de 1 par $\varprojlim_I$, est elle aussi un qis, et cela termine la preuve dans le cas général.

$\square$

Remarque 7.4 (i) *A l'aide du lemme 3.1, on peut réécrire la formule définissant $D(\Gamma)$ de la manière suivante :*

$$D(\Gamma) \simeq \varinjlim_{n,k} RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(\mathbb{Z}/p^k), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

On retrouve la formule de [Ser97] A.2 prop. 3.1, 5. c) en prenant la cohomologie.

(ii) *Encore à l'aide du lemme 3.1, on voit que $D(\Gamma)$ est effectivement le complexe dualisant pour la catégorie des Γ-modules de discrets de p-torsion, au sens de [Ser97], annexe de Verdier. Mieux : pour $A \in {}_\Gamma\mathcal{C}_{tor}$ il y a un isomorphisme fonctoriel dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ (ou dans $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$, en inversant l'action, ce qu'on n'a pas fait jusqu'ici pour des raisons d'écritures liées au foncteurs d'induction) :*

$$RHom_{\mathbb{Z}_p}(R\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq R\underline{Hom}(A, D(\Gamma))$$

(iii) *Si $A \in D^b({}_\Gamma\mathcal{C})$, alors 7.3 appliqué à $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ donne, dans $D^b({}_{\underline{\Gamma}}\mathcal{C})$ (ou $D^b(\mathcal{C}_{\underline{\Gamma}})$) :*

$$\begin{array}{rcl} RHom_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p & \simeq & RHom_{\mathbb{Z}_p}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\underline{\overset{L}{\otimes}}\mathbb{Z}_p \\ & \overset{7.3}{\simeq} & R\underline{Hom}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, D(\Gamma)) \\ & \simeq & R\underline{Hom}(A, RHom_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, D(\Gamma))) \end{array}$$

le premier et troisième isomorphismes étant obtenus par adjonction.

Références

[Bel] J.-R. Belliard – « Global units modulo circular units : descent without Iwasawa's main conjecture », *Canadian J. of Maths.*, à paraître.

[Bel02] — , « Sous-modules d'unités en théorie d'Iwasawa », *Publ. Math. Besançon* (2002).

[BNQD05] J.-R. Belliard et T. Nguyen Quang Do – « On modified circular units and annihilation of real classes », *Nagoya Math. J.* **177** (2005), p. 77–115.

[Bru66] A. Brumer – « Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations », *J. of Algebra* **4** (1966), p. 442–470.

[Del] P. Deligne – « Cohomologie à supports propres », SGA 4, 3, exp. XVII.

[Gre73] R. Greenberg – « On a certain l-adic representation », *Inv. Math.* **21** (1973), p. 117–124.

[Gre76] — , « On the Iwasawa invariants of totally real number fields », *Amer. J. Math.* **98** (1976), p. 263–284.

[Gre78] — , « On the structure of certain galois groups », *Inv. Math.* **47** (1978), p. 85–99.

[Gre06] — , « On the structure of certain galois cohomology groups », *Doc. Math.* (2006), p. 335–391, Extra Volume J. Coates.

[Gre94] C. Greither – « Sur les normes universelles dans les Z_p-extensions », *J. Th. Nb. de Bordeaux* **6** (1994), p. 205–220.

[Iwa73] K. Iwasawa – « On Z_l-extensions of algebraic number fields », *Annals of Math.* **98** (1973), p. 246–326.

[Iwa83] — , « On cohomology groups of units for Z_p-extensions », *American J. of Math.* **105** (1983), p. 189–200.

[Jan88] U. Jannsen – « Continuous etale cohomology », *Math. Ann.* **280** (1988), p. 207–245.

[Jan89] — , « Iwasawa modules up to isomorphism », *Advanced Studies in Pure Mathematics* **17** (1989), p. 171–207.

[Jan03] — , « A spectral sequence for Iwasawa adjoints », (1994/2003), non publié, 11p.

[Jen72] C. U. Jensen – « Les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules », *Lect. Notes in Math., Springer-Verlag* **254** (1972).

[Kat06] K. Kato – « Universal norms of p-units in some non-commutative galois extensions », *Doc. Math.* (2006), p. 551–565, Extra Volume J. Coates.

[KN95] R. Kucera et J. Nekovář – « Cyclotomic units in Z_p-extensions », *J. of Algebra* **171** (1995), no. 2, p. 457–472.

[Kol91] M. Kolster – « An idelic approach to the wild kernel », *Inv. Math.* **103** (1991), p. 9–24.

[KS05] M. Kashiwara et P. Schapira – *Categories and sheaves*, Springer, 2005.

[Kuz72] L. V. Kuz'min – « The Tate module for algebraic number fields », *Math. USSR Izvestija* **6** (1972), no. 2, p. 263–321.

[KY82] V. G. Khalin et A. V. Yakovlev – « Universal norms in Γ-extensions », *Journal of Mathematical science* **20** (1982), no. 6, p. 2692–2696.

[Laz65] M. Lazard – « Groupes analytiques p-adiques », *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* **26** (1965), p. 5–219.

[LFMNQD05] M. Le Floc'h, A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do – « On capitulation cokernels in Iwasawa theory », *Am. J. of Math.* **127** (2005), no. 4, p. 851–877.

[LNQD00] A. Lannuzel et T. Nguyen Quand Do – « Conjectures de Greenberg et extensions pro-p-libres d'un corps de nombres », *Manuscripta Math.* **102** (2000), p. 187–209.

[McC01] W. McCallum – « Greenberg's conjecture and units in multiple Z_p-extensions », *American J. of Math.* **123** (2001), p. 909–930.

[Mil04] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, 2004, Second edition.

[Nek06] J. Nekovář – « Selmer complexes », *Astérisque* **310** (2006), p. 559p.

[NQD84] T. Nguyen Quang Do – « Formation de classes et modules d'Iwasawa », *Springer Lect. Notes* **1068** (1984), p. 167–185.

[NQDL06] T. Nguyen Quang Do et M. Lescop – « Iwasawa descent and co-descent for units modulo circular units », *Pure Appl. Math. Quarterly* **2** (2006), no. 2, p. 199–230, (appendice de J-R. Belliard).

[NQDV05] T. Nguyen Quang Do et D. Vauclair – « K_2 et conjectures de Greenberg dans les Z_p-extensions multiples », *J. de Th. des Nb de Bordeaux* **17** (2005), p. 693–712.

[Roo61] J.-E. Roos – « Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. applications. », *C. R. Acad. Sc. Paris* **252** (1961), p. 3702–3704.

[Ser65] J.-P. Serre – *Algèbre locale, multiplicités*, Springer, 1965.

[Ser97] — , *Cohomologie galoisienne*, Springer, 1973/1997.

[Sin80] W. Sinnott – « On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field », *Inv. Math.* **62** (1980), p. 181–234.

[Tat76] J. Tate – « Relations between K_2 and Galois cohomology », *Inv. Math.* **36** (1976), p. 257–274.

[Tsu99] T. Tsuji – « Semi-local units modulo cyclotomic units », *J. Number Theory* **78** (1999), no. 1, p. 1–26.

[Vau05] D. Vauclair – « Cup produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée », *K-theory* **36** (2005), p. 223–244.

[Vau06] — , « Sur les normes universelles et la structure de certains modules d'Iwasawa », (2006), non publié, 53p.

[Vau08] — , « Noyaux de Tate et capitulation », *J. Number Theory* **128** (2008), no. 3, p. 619–638.

David Vauclair, vauclair@math.unicaen.fr
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen, Campus 2, 14032 Caen Cedex.